

539.4

Б-72

по 10 1/2

список упрямости

1465









539.4  
8-72

у

# ГИДРОСТАТИКА

И

# ТЕОРІЯ УПРУГОСТИ.

1765 88  
с/а.

СОСТАВИЛЪ

Д. БОБЫЛЕВЪ.

у

17 0 САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

(Вас. Остр., 9 л., № 12).

1886.





П

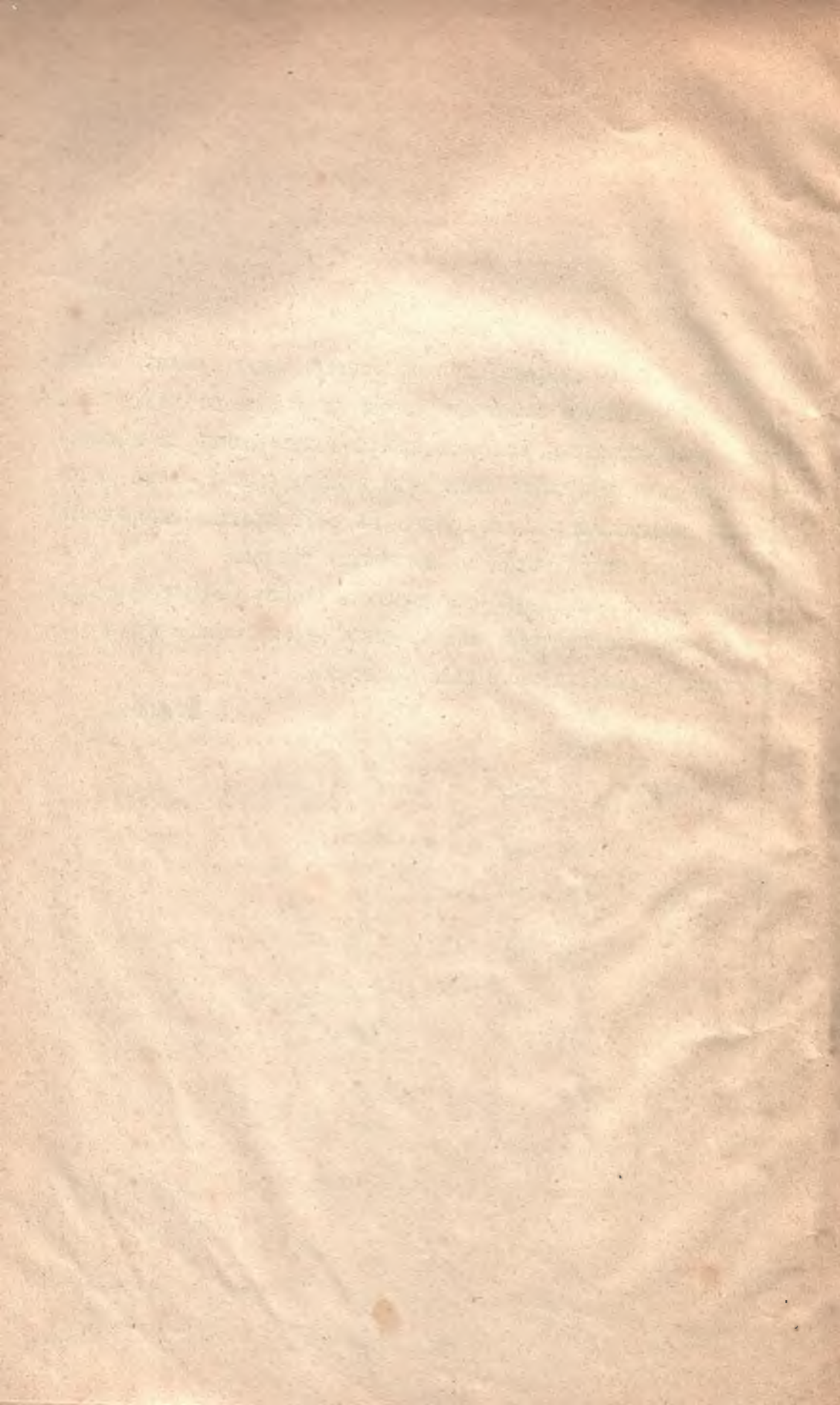
Книга, первый выпускъ которой я теперь издаю, имѣетъ цѣлью дать возможно полное изложеніе теоріи упругости со включеніемъ ученія о распространеніи свѣта въ прозрачныхъ средахъ. Я надѣюсь, что слѣдующимъ выпускомъ книга будетъ закончена; въ немъ будетъ помѣщено предисловіе, заключающее въ себѣ краткій историческій обзоръ развитія этихъ ученій до настоящаго времени.

Приношу мою глубокую благодарность Совѣту С.-Петербургскаго Университета, доставившему мнѣ средства на напечатаніе курса аналитической механики и этого самаго выпуска.

Д. Вобылевъ.

1886 года.  
Май, 1-е число.

1765  
с/а





# ВВЕДЕНИЕ ВЪ ТЕОРІЮ УПРУГОСТИ, ГИДРОСТАТИКА

II

## ОСНОВНЫЯ УРАВНЕНІЯ ГИДРОДИНАМИКИ.

I.

### О составленіи дифференціальныхъ уравненій движенія гибкихъ и деформируемыхъ сплошныхъ тѣлъ.

Въ этой главѣ будутъ изложены соображенія, которыми руководствуются при примѣненіи механики системы матеріальныхъ точекъ къ теоріи равновѣсія и движенія деформируемыхъ сплошныхъ матеріальныхъ тѣлъ разнаго рода.

#### § 1. Предположенія, дѣлаемыя относительно силъ взаимодѣйствія между атомами.

По атомистической теоріи, всякое матеріальное тѣло, не смотря на свою кажущуюся сплошность, состоитъ изъ атомовъ.

Каждый атомъ есть недѣлимое абсолютно-твердое тѣло, размѣры котораго въ такой же степени ничтожны, въ какой, примѣрно, громады разстоянія отъ земли до неподвижныхъ звѣздъ.

Между атомами дѣйствуютъ силы взаимодѣйствія, которыя, можетъ быть, не только стремятся измѣнить разстоянія между ними, но могутъ еще побуждать ихъ принять вращательныя движенія относительно другъ друга.

Такимъ образомъ теорія движенія и равновѣсія матеріальнаго нетвердаго тѣла приводится къ вопросу механики системы твердыхъ тѣлъ, между которыми дѣйствуютъ нѣкоторыя силы взаимодѣйствія; для того, чтобы поставить разсужденія на опредѣленную почву, необходимо сдѣлать предположенія относительно вида атомовъ и относительно закона взаимодѣйствій между ними.

Во многихъ вопросахъ математической физики нѣтъ надобности принимать въ расчетъ вращеніе атомовъ; тогда можно каждый атомъ замѣнить матеріальною точкою, не дѣлая никакихъ предположеній относительно вида атомовъ.



Относительно силъ взаимодѣйствія, дѣйствующихъ между матерьяльными точками, замѣняющими атомы, дѣлаются обыкновенно слѣдующія предположенія.

Предположение *E* относительно взаимодѣйствій между атомами.

Предполагается, что силы эти слѣдуютъ началу равенства и противоположности, т. е., что силы, дѣйствующія между атомами *A* и *B*, равны и прямо противоположны.

Кромѣ того предполагается, что эти силы направлены по лини, соединяющей точки, то есть атомы *A* и *B*, и что величина каждой изъ этихъ сил равняется произведенію

$$m_A m_B f(r_{AB}),$$

гдѣ  $m_A$  и  $m_B$  суть массы атомовъ, а  $r_{AB}$  — расстояние между ними.

Кромѣ этихъ силъ, на атомы могутъ дѣйствовать еще и другія силы, исходящія изъ центровъ, лежащихъ внѣ разсматриваемаго тѣла.

При такихъ предположеніяхъ, теорія движенія и равновѣсія матерьяльнаго не-твердаго тѣла приводится къ вопросу механики системы матерьяльныхъ точекъ, къ которымъ приложены данныя силы.

**§ 2. Шесть такихъ дифференціальныхъ уравненій для каждой части тѣла, изъ которыхъ исключены величины всѣхъ внутреннихъ силъ этой части.**

Представимъ себѣ всю систему матерьяльныхъ точекъ, замѣняющихъ атомы даннаго матерьяльнаго тѣла.

Выдѣлимъ мысленно какую либо часть тѣла, какую угодно и которую угодно.

Всю совокупность атомовъ, заключающихся внутри выдѣленной части, будемъ обозначать знакомъ *Jn*, а всю совокупность атомовъ остальной части тѣла — знакомъ *Ex*.

Атомъ части *Jn* будемъ обозначать буквою *m* съ надлежащимъ значкомъ внизу и сбоку ея, а атомъ части *Ex* — буквою  $\mu$ , тоже съ надлежащимъ значкомъ (напримѣръ,  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_i$  суть различные атомы части *Jn*, а  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  — различные атомы части *Ex*); впрочемъ эти знаки должны обозначать преимущественно величины массъ тѣхъ же атомовъ.

Представимъ себѣ, что мы составили дифференціальныя уравненія движенія для каждого изъ атомовъ части *Jn*; для того, чтобы условиться относительно обозначенія нѣкоторыхъ величинъ, входящихъ въ эти уравненія, мы выпишемъ здѣсь одно изъ нихъ, а именно первое дифференціальное уравненіе для атома  $m_i$ :

$$m_i x_i'' = m_i \sum_{Jn} m_j f_{ij}(r_{ij}) \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}} + m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(x_i - x_k)}{r_{ik}} + X_i.$$

Вторая часть этого уравненія представлена въ видѣ трехъ членовъ; первый членъ выражаетъ сумму проэкцій силъ, дѣйствующихъ на атомъ  $m_i$  со стороны всѣхъ остальныхъ атомовъ части *Jn*, такъ что суммированіе, означенное въ этомъ членѣ, должно быть распространено на всѣ атомы этой части; второй членъ выражаетъ сумму



проекцій силъ, дѣйствующихъ на атомъ  $m_i$  со стороны всѣхъ атомовъ части  $Ex$ ; наконецъ, третій членъ ( $X_i$ ) выражаетъ сумму проекцій всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на атомъ  $m_i$  извнѣ разсматриваемаго тѣла.

Представимъ себѣ далѣе, что съ дифференціальными уравненіями движенія атомовъ части  $Jn$  мы поступимъ такъ, какъ показано въ §§ 85-мъ и 93-мъ механики материальныхъ точекъ: тогда получимъ шесть дифференціальныхъ уравненій для части  $Jn$ : три дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи ея и три дифференціальныя уравненія моментовъ количествъ движенія всей этой части. Въ первыхъ трехъ уравненіяхъ взаимно сократятся проекціи каждой пары равныхъ и противоположныхъ взаимнодѣйствій между атомами части  $Jn$ , а въ остальныхъ трехъ — равные и противоположные моменты каждой такой пары, такъ что во всѣхъ шести уравненіяхъ не будетъ заключаться никакихъ внутреннихъ силъ части  $Jn$  материальнаго тѣла.

Эти шесть дифференціальныхъ уравненій будутъ таковы:

$$\sum_{Jn} m_i x_i'' = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(x_i - x_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} X_i, \dots \dots (1, a)$$

$$\sum_{Jn} m_i y_i' = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(y_i - y_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} Y_i, \dots \dots (1, b)$$

$$\sum_{Jn} m_i z_i'' = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(z_i - z_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} Z_i, \dots \dots (1, c)$$

$$\frac{dA_x}{dt} = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(z_i y_k - y_i z_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} (y_i Z_i - z_i Y_i), \dots \dots (1, d)$$

$$\frac{dA_y}{dt} = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(x_i z_k - z_i x_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} (z_i X_i - x_i Z_i), \dots \dots (1, e)$$

$$\frac{dA_z}{dt} = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(y_i x_k - x_i y_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} (x_i Y_i - y_i X_i), \dots \dots (1, f)$$

гдѣ  $A_x$ ,  $A_y$ , и  $A_z$  суть моменты количествъ движенія части  $Jn$  вокругъ осей  $X$ -овъ,  $Y$ -овъ и  $Z$ -овъ.

Такія шесть дифференціальныхъ уравненій должны имѣть мѣсто, какъ для всего материальнаго тѣла, такъ и для всякой части его, большой или малой.

### § 3. Радіусъ сферы дѣйствія частичныхъ силъ.

Произведение  $m_i \mu_k f_{ik}(r_{ik})$ , заключающееся въ предыдущихъ формулахъ, выражаетъ положительно-взятую величину отталкивающей силы или отрицательно-взятую величину притягательной силы, дѣйствующей между атомами  $m_i$  и  $\mu_k$ .

Видъ функціи  $f_{ik}(r_{ik})$  въ точности неизвѣстенъ; но для объясненія большей части извѣстныхъ намъ явленій физическаго міра, а въ особенности тѣхъ, которыя разсматриваются въ физикѣ частичныхъ силъ, намъ приходится сдѣлать слѣдующее предположеніе относительно характера этой функціи.

Предположение  $F$  относительно радиуса сферы дѣйствія частичныхъ силъ.

Предполагается, что функция  $f(r)$  состоитъ изъ суммы двухъ частей.

Первая часть есть Нютонова сила тяготѣнія, обратно-пропорціональная квадрату разстоянія.

Вторая часть есть такая функция, которая имѣетъ замѣтную величину только при ничтожно-малыхъ разстояніяхъ между атомами, при разстояніяхъ же равныхъ или большихъ некоторой весьма малой величины  $\rho$ , функция эта равна нулю.

Означивъ эту вторую функцию черезъ  $\phi(r)$ , можемъ выразить приведенное предположеніе въ видѣ слѣдующей формулы:

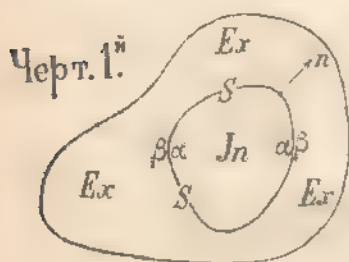
$$m\mu f(r) = -\epsilon \frac{m\mu}{r^2} + m\mu\phi(r).$$

Сила  $m\mu\phi(r)$  извѣстна подѣ именемъ *частичной силы*, а разстояніе  $\rho$  называется *радіусомъ сферы дѣйствія частичныхъ силъ*.

При такомъ предположеніи первые члены вторыхъ частей уравненій (1) раздѣлятся на двѣ части каждый; одна часть будетъ относиться къ частичнымъ силамъ, другая — къ силамъ тяготѣнія, дѣйствующимъ со стороны атомовъ  $\mu$  на атомы  $m$ .

Обратимъ вниманіе на члены, зависящіе отъ частичныхъ силъ.

На основаніи вышеприведеннаго предположенія, эти члены будутъ заключать взаимодѣйствія только между такими парами атомовъ  $\mu$  и  $m$ , разстоянія между которыми не болѣе  $\rho$  (радіуса сферы дѣйствія); всѣ такіе атомы  $\mu$  части тѣла  $E_x$  находятся въ слое толщины  $\rho$ , прилежащемъ къ поверхности  $S$ , отдѣляющей эту часть отъ части  $J_n$ ; всѣ же такіе атомы  $m$  части тѣла  $J_n$  находятся въ другомъ слое такой же толщины, прилежащемъ къ той же поверхности  $S$  со стороны  $J_n$ ; на чертежѣ 1-мъ изображены оба эти



слоя, первый обозначенъ буквою  $\beta$ , второй — буквою  $\alpha$ .

Такимъ образомъ оказывается, что частичныя силы, дѣйствующія со стороны части тѣла  $E_x$  на часть  $J_n$ , приложены къ атомамъ слоя  $\alpha$  и исходятъ изъ атомовъ слоя  $\beta$ .

#### § 4. Напряженіе (Stress).

Выдѣлимъ мысленно изъ поверхности  $S$  какой либо элементъ  $\Delta S$  весьма малыхъ размѣровъ.

Представимъ себѣ всю совокупность тѣхъ частичныхъ силъ, приложенныхъ къ атомамъ части слоя  $\alpha$ , прилежащей къ элементу  $\Delta S$ , направленія которыхъ пересекаютъ поверхность этого элемента.

Въ англійскомъ научномъ языкѣ существуетъ особый терминъ для наименованія этой совокупности силъ, а именно терминъ „Stress“, который мы переведемъ на русскій языкъ словомъ „напряженіе“; но намъ необходимо условиться относительно правильнаго употребленія этого термина.

Вышесказанную совокупность силъ мы будемъ называть *напряженіемъ, дѣйствующимъ сквозь площадку  $\Delta S$  на часть тѣла  $J_n$  со стороны части  $E_x$* ; вслѣд-



ствіе равенства и противоположности взаимодѣйствій между атомами, *напряженіе, действующее сквозь ту же площадку на часть тѣла Ех со стороны части тѣла Іп*, будетъ совокупностью силъ, равныхъ и противоположныхъ силамъ предыдущей совокупности.

Пусть *А* есть какаа либо точка поверхности *S*, находящаяся внутри площадки  $\Delta S$  или на ея периметрѣ. Возстановимъ нормаль *n* изъ точки *А* къ поверхности *S* внаружу части *Іп*.

Составимъ сумму проэкцій на ось *X*-овъ всѣхъ силъ первой совокупности и раздѣлимъ эту сумму на величину площади элемента  $\Delta S$ ; точно также поступимъ и съ суммами проэкцій этихъ силъ на двѣ другія оси; получимъ три отношенія:

$$\frac{\sum X}{\Delta S}, \quad \frac{\sum Y}{\Delta S}, \quad \frac{\sum Z}{\Delta S} \dots \dots \dots (2)$$

Величины этихъ отношеній могутъ измѣняться съ измѣненіемъ мѣста элемента на поверхности и съ измѣненіемъ размѣровъ его; при непрерывномъ уменьшеніи размѣровъ элемента, отношенія эти будутъ приближаться къ нѣкоторымъ предѣльнымъ значеніямъ, величины которыхъ могутъ зависѣть отъ того, къ какой точкѣ поверхности приближается постепенно суживающаяся периферія элемента.

Предположимъ, что, при уменьшеніи размѣровъ элемента  $\Delta S$ , мы суживаемъ его периферію такимъ образомъ, чтобы точка *А* всегда находилась внутри или на периферіи; пусть  $X_n$ ,  $Y_n$  и  $Z_n$  суть предѣльные значенія, къ которымъ отношенія (2) приближаются при такомъ уменьшеніи размѣровъ элемента  $\Delta S$ , т. е.:

$$\left. \begin{aligned} \text{предѣлъ } \left[ \frac{\sum X}{\Delta S} \right]_{\Delta S=0} &= X_n, \\ \text{предѣлъ } \left[ \frac{\sum Y}{\Delta S} \right]_{\Delta S=0} &= Y_n, \\ \text{предѣлъ } \left[ \frac{\sum Z}{\Delta S} \right]_{\Delta S=0} &= Z_n. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Величину:

$$F_n = + \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2} \dots \dots \dots (4)$$

мы будемъ называть *величиною напряженія, действующаго на часть Іп въ точкѣ А поверхности S*, а направленіе, проведенное изъ точки *А* и составляющее съ осами координатъ такіе углы, косинусы которыхъ равны отношеніямъ:

$$\frac{X_n}{F_n}, \quad \frac{Y_n}{F_n}, \quad \frac{Z_n}{F_n},$$

назовемъ *направленіемъ этого напряженія*.

Направленіе напряженія мы будемъ обозначать тѣмъ же знакомъ  $F_n$ , какимъ обозначаемъ величину его; поэтому можемъ написать слѣдующія равенства:

$$\left. \begin{aligned} F_n \cos (F_n, X) &= X_n, \\ F_n \cos (F_n, Y) &= Y_n, \\ F_n \cos (F_n, Z) &= Z_n, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

выражающія, что  $X_n$ ,  $Y_n$ ,  $Z_n$  суть проекціи напряженія  $F_n$  на оси координатъ. или составляющія его по этимъ осямъ.

### § 5. Выраженія проекцій на оси координатъ главнаго вектора и главнаго момента напряженій, дѣйствующихъ на часть тѣла.

Если точка приложенія какой либо силы будетъ перенесена на какую либо длину вдоль по ея направленію, то черезъ это не измѣнится ни моментъ ея вокругъ какой нибудь оси, ни моментъ ея вокругъ какого либо центра.

Поэтому, при составленіи уравненій (1) мы вправѣ предположить, что точка приложенія каждой частичной силы, дѣйствующей изъ атома  $\mu$  части  $E\alpha$  на атомъ  $m$  части  $In$ , перенесена изъ  $m$ , вдоль по направленію  $mr$ , въ точку пересѣченія длины  $mr$  съ поверхностью  $S$ ; черезъ это величины проекцій главнаго вектора и главнаго момента частичныхъ силъ не измѣнятся, но измѣнится видъ выраженій этихъ величинъ, такъ какъ мѣстомъ приложенія частичныхъ силъ будетъ теперь считаться не слой  $\alpha$ , а поверхность  $S$ .

Для того, чтобы составить новыя выраженія соответственныхъ членовъ уравненій (1), надо прежде всего представить себѣ, что вся поверхность  $S$  раздроблена на безчисленное множество элементовъ безконечно-малыхъ размѣровъ, затѣмъ надо составить выраженія проекцій на оси координатъ вектора и момента напряженій, приложенныхъ къ каждому элементу: эти выраженія будутъ заключать величины  $X_n$ ,  $Y_n$ ,  $Z_n$ . Составивъ надлежащія выраженія, останется только взять интегралы по всей поверхности.

Величины  $X_n$ ,  $Y_n$ ,  $Z_n$ , т. е. проекціи на оси координатъ напряженій, дѣйствующаго въ точкѣ поверхности  $S$ , суть функціи координатъ точекъ поверхности, но функціи не сплошныя; онѣ могли бы быть сплошными, если бы вещество было сплошнымъ въ дѣйствительности, а не состояло бы изъ атомовъ, раздѣленныхъ промежутками, и если бы частичныя силы дѣйствовали между всѣми точками слоя  $\beta$  и всѣми точками слоя  $\alpha$ , а не между изолированными точками-атомами этихъ слоевъ.

Однако во всѣхъ расчетахъ математической физики эти функціи предполагаются сплошными; на это предположеніе считаемъ нужнымъ обратить вниманіе.

Предположеніе  $G$  относительно сплошности функцій, выражающихъ проекціи напряженія на оси координатъ.

Проекціи  $X_n$ ,  $Y_n$ ,  $Z_n$  напряженій, дѣйствующихъ въ точкахъ поверхности  $S$ , предполагаются сплошными функціями координатъ.

При такомъ предположеніи, напряженія  $F_n$  въ двухъ безконечно-близкихъ точкахъ поверхности разнятся безконечно-мало, какъ по величинѣ, такъ и по направленію; если бы они были вполнѣ одинаковы во всѣхъ точкахъ элемента  $dS$ , то проекціи на оси координатъ вектора всѣхъ частичныхъ силъ, приложенныхъ къ этому элементу, были бы равны:

$$X_n dS, Y_n dS, Z_n dS,$$

а проекціи момента всѣхъ этихъ силъ были бы равны:

$$(y_n Z_n - z_n Y_n) dS, (z_n X_n - x_n Z_n) dS, (x_n Y_n - y_n X_n) dS,$$

гдѣ  $x_n$ ,  $y_n$ ,  $z_n$  суть координаты центра инерціи площади элемента  $dS$ .



Вообще же, на основании предыдущаго предположенія  $G$ , проекціи на оси координат главного вектора напряженій, приложенныхъ къ точкамъ всей поверхности  $S$ , даются следующими интегралами, взятыми по всей поверхности:

$$\iint X_n dS, \quad \iint Y_n dS, \quad \iint Z_n dS, \dots\dots\dots (6)$$

Для главныхъ моментовъ тѣхъ же напряженій выразятся интегралами:

$$\left. \begin{aligned} &\iint (y, Z_n - z, Y_n) dS, \quad \iint (z, X_n - x, Z_n) dS, \\ &\iint (x, Y_n - y, X_n) dS, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

Гдѣ  $x, y, z$  суть координаты какой либо точки элемента, а  $X_n, Y_n, Z_n$  — проекціи напряженія, дѣйствующаго въ этой точкѣ на часть тѣла  $J_n$ .

## § 6. Измѣренія напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ данной поверхности. Давленія, натяженія и тангенціальныя напряженія.

Всякія силы, приложенныя сплошнымъ образомъ къ какой либо поверхности, разсчитываются такъ сказать на единицу поверхности, а именно, для каждой точки поверхности вычисляется не величина силы, но величина нѣкотораго отношенія силы къ площади.

Разсчетъ производится такимъ же образомъ, какъ показано въ § 4-мъ относительно опредѣленія величины и направленія напряженія  $F_n$ , дѣйствующаго въ какой либо точкѣ поверхности съ той стороны, куда возстановлено положительное направленіе нормали  $n$ , на часть тѣла  $J_n$ .

Изъ формулъ (2), (3) и (4) видно, что величина напряженія  $F_n$  имѣетъ измѣренія отношенія силы къ площади, такъ что:

$$\text{единица напряженія } F_n = \frac{\text{единица силы}}{(\text{единица длины})^2} \dots\dots\dots (8)$$

Чтобы составить себѣ понятіе о значеніи этой единицы, представимъ себѣ такой случай, что часть поверхности  $S$  имѣетъ видъ плоскости, что напряженія, дѣйствующія во всѣхъ точкахъ этой части поверхности, равны и параллельны между собою и что главный векторъ напряженій, приложенныхъ къ каждой единицѣ площади этой части поверхности, равенъ единицѣ силы; тогда величина напряженія, дѣйствующаго въ каждой точкѣ этой части поверхности, будетъ равна единицѣ напряженій.

Если же главный векторъ напряженій, приложенныхъ къ каждой единицѣ вышесказанной части поверхности, равенъ  $k$  единицамъ силы, а всѣ прочія обстоятельства будутъ тѣ же, то величина напряженія, дѣйствующаго въ каждой точкѣ этой поверхности, будетъ равна  $k$  единицамъ напряженій.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда поверхность  $S$  не плоская и напряженія въ точкахъ ея хотя и неодинаковы, но слѣдуютъ условію сплошности, знаніе величины и направ-

ленія напряженія  $F_n$ , дѣйствующаго въ какой либо точкѣ  $A$  этой поверхности, даетъ намъ возможность утверждать, что главный векторъ напряженій, приложенныхъ къ безконечно-малому элементу  $dS$ , заключающему въ себѣ точку  $A$ , имѣетъ величину, отличающуюся отъ  $F_n dS$  безконечно-малыми величинами высшихъ порядковъ.

Всякое напряженіе, дѣйствующее въ точкѣ поверхности, можетъ быть разложено на двѣ составляющія: одну по направленію нормали  $n$ , другую — въ касательной плоскости къ поверхности; первая составляющая называется *натяженіемъ*, если она направлена по положительной части нормали, и *давленіемъ* въ противоположномъ случаѣ; составляющая напряженія въ касательной плоскости называется *тангенціальнымъ напряженіемъ*.

Когда извѣстны  $X_n, Y_n, Z_n$ , то составляющая напряженія по нормали  $n$  выразится такъ:

$$F_n \cos (F_n, n) = X_n \cos (n, X) + Y_n \cos (n, Y) + Z_n \cos (n, Z); \dots (9)$$

это есть натяженіе, если направленіе  $F_n$  составляетъ острый уголъ съ положительнымъ направленіемъ нормали  $n$ ; если же уголъ  $(F_n, n)$  тупой, то формула (9) выражаетъ отрицательно-взятую величину давленія.

Надо имѣть въ виду, что къ наружной поверхности тѣла могутъ быть приложены *внѣшнія* давленія, натяженія и тангенціальныя напряженія.

## § 7. Силы, приложенныя къ элементамъ объема сплошнаго дѣла.

Силы, приложенныя ко всѣмъ атомамъ тѣла и дѣйствующія извнѣ его, а также силы тяготѣнія, дѣйствующія между атомами его, мы будемъ называть *силами, приложенными къ элементамъ объема тѣла* или проще *объемными силами*.

Эти силы, приложенныя къ атомамъ сплошнаго тѣла, вводятся въ расчетъ слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ какую либо точку  $A$  тѣла и мысленно выдѣлимъ малый объемъ  $\Delta O$  его, заключающій точку  $A$  внутри себя или на своей поверхности. Составимъ величины прожекцій на оси координатъ главнаго вектора силъ, приложенныхъ ко всѣмъ атомамъ этого объема и раздѣлимъ эти величины на массу  $\Delta m$  объема  $\Delta O$ ; получатся отношенія:

$$\frac{\sum X}{\Delta m}, \quad \frac{\sum Y}{\Delta m}, \quad \frac{\sum Z}{\Delta m}.$$

величины которыхъ могутъ зависѣть отъ величины и вида выдѣленнаго объема  $\Delta O$  тѣла. Представимъ себѣ, что мы выдѣляемъ все меньшіе и меньшіе объемы  $\Delta O$ , заключающіе въ себѣ точку  $A$ ; по мѣрѣ приближенія величины объема къ нулю, величины вышесказанныхъ отношеній приближаются къ нѣкоторымъ предѣламъ, которые мы означимъ такъ:  $\mathcal{X}_A, \mathcal{Y}_A, \mathcal{Z}_A$ ; слѣдовательно:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{X}_A &= \text{предѣлу} \left[ \frac{\sum X}{\Delta m} \right]_{\Delta O \rightarrow 0} \\ \mathcal{Y}_A &= \text{предѣлу} \left[ \frac{\sum Y}{\Delta m} \right]_{\Delta O \rightarrow 0} \\ \mathcal{Z}_A &= \text{предѣлу} \left[ \frac{\sum Z}{\Delta m} \right]_{\Delta O \rightarrow 0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$



Величину.

$$\tilde{\mathfrak{F}}_A = + \sqrt{\mathfrak{X}_A^2 + \mathfrak{Y}_A^2 + \mathfrak{Z}_A^2} \dots\dots\dots (11)$$

такимъ образомъ имѣетъ величину объемной силы въ точкѣ  $A$ . Направленіе  $\tilde{\mathfrak{F}}_A$ , опредѣляется косинусами:

$$\cos (\tilde{\mathfrak{F}}_A, X) = \frac{\mathfrak{X}_A}{\tilde{\mathfrak{F}}_A}, \cos (\tilde{\mathfrak{F}}_A, Y) = \frac{\mathfrak{Y}_A}{\tilde{\mathfrak{F}}_A}, \cos (\tilde{\mathfrak{F}}_A, Z) = \frac{\mathfrak{Z}_A}{\tilde{\mathfrak{F}}_A}, \dots\dots\dots (12)$$

Если захотѣть изобразить направленіемъ этой силы; тогда предѣлы (10) получаютъ значеніе проекцій этой силы на оси координатъ, или составляющихъ ея по этимъ осямъ.

Функции  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$  суть функции координатъ точки  $A$  и притомъ функции не сплошныя, а дискретныя, такъ какъ къ промежуткамъ между атомами силъ не приложено; но мы будемъ считать, что эти функции неразрывны внутри всего объема занимаемаго тѣломъ, и будемъ при этомъ считать сплошнымъ; такое предположеніе аналогично предположенію  $G$ , сдѣланному относительно силъ поверхностныхъ.

Проекціи  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$  объемной силы, дѣйствующей въ точкахъ сплошнаго тѣла, предполагаются сплошными функциями координатъ этихъ точекъ.

При такомъ предположеніи объемныя силы  $\tilde{\mathfrak{F}}$  въ безконечно-близкихъ точкахъ тѣла разнятся между собою безконечно-мало, какъ по величинѣ, такъ и по направленію.

Величина  $\tilde{\mathfrak{F}}$  имѣетъ измѣреніе ускоренія, такъ какъ она равняется отношенію силы къ массѣ.

$$\text{Единица величинъ } \tilde{\mathfrak{F}} = \frac{\text{единиц. силы}}{\text{единиц. массы}} \dots\dots\dots (13)$$

Слѣдовательно, можно сказать, что величины и направленія  $\tilde{\mathfrak{F}}$  представляютъ собою величины и направленія тѣхъ ускореній, которыя приняли бы точки свободнаго тѣла при дѣйствіи объемныхъ силъ, если бы не существовало ни частичныхъ силъ, ни извѣстныхъ напряженій.

Если бы величины и направленія  $\tilde{\mathfrak{F}}$  были одинаковы во всѣхъ точкахъ тѣла, то объемныя силы были бы приложены къ нему однородно и тогда величины проекцій силы, приложенной ко всему тѣлу, равнялись бы произведеніямъ  $\mathfrak{X}M, \mathfrak{Y}M, \mathfrak{Z}M$ , гдѣ  $M$  есть масса тѣла.

Къ числу такихъ однородныхъ силъ принадлежатъ сила тяжести; если ось  $Y$ -овъ параллельна силѣ тяжести, то  $\mathfrak{X}$  и  $\mathfrak{Z}$  во всякой точкѣ тѣла равна нулю, а

$$\mathfrak{Y} = \frac{g \Delta m}{\Delta m} = g$$

также во всякой точкѣ тѣла.

Такіе случаи однороднаго распредѣленія объемныхъ силъ встрѣчаются сравнительно рѣдко, болѣею частью величины и направленія  $\tilde{\mathfrak{F}}$  неодинаковы даже въ малыхъ частяхъ тѣла.

Однако, по предполагаемой нами сплошности объемныхъ силъ, въ безконечно-малыхъ точкахъ тѣла величины и направленія  $\tilde{\mathfrak{F}}$  разнятся между собою безконечно-

мало; слѣдовательно, чѣмъ менѣе размѣры какого либо весьма малаго элемента тѣла, тѣмъ менѣе разнятся между собою ускоренія  $\delta$  различныхъ точекъ его и тѣмъ распределение приложенной къ нему объемной силы однороднѣе.

По этимъ причинамъ проэкции на оси координатъ объемной силы, приложенной къ безконечно-малому объемному элементу  $dO$ , выразятся такъ:

$$X\sigma dO + \alpha_1, Y\sigma dO + \alpha_2, Z\sigma dO + \alpha_3,$$

а проэкции на оси координатъ момента этой силы — такъ:

$$(yZ - zY)\sigma dO + \alpha_4, (zX - xZ)\sigma dO + \alpha_5,$$

$$(xY - yX)\sigma dO + \alpha_6,$$

гдѣ  $x, y, z$  суть координаты какой либо точки внутри или на поверхности элемента  $dO$ ,  $\sigma$  — плотность матеріи въ той же точкѣ,  $X, Y, Z$  — проэкции на оси координатъ объемной силы въ той же точкѣ; дополнительные члены  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$  становятся безконечно-малыми величинами четвертаго или высшаго порядка малости, когда элементы объема становятся безконечно-малыми величинами третьяго порядка малости.

### § 8. Новый видъ уравненій (1) параграфа 2-го.

На основаніи всего вышесказаннаго въ §§ 3—7, суммы замѣняются интегралами, распространенными, одни — по объему части  $J_n$ , другіе — по поверхности этой части.

Интегралы, распространенные по объему, можно раздѣлить на сумму двухъ частей: одна часть будетъ заключать подъ интегралами члены третьяго порядка малости, такіе какъ  $X\sigma dO$ , другая будетъ заключать дополнительные члены  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$  четвертаго и высшаго порядка малости. При уменьшеніи размѣровъ элементовъ объема  $dO$  до безконечной малости, суммы или интегралы, заключающіе  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ , будутъ безконечно-малы сравнительно съ интегралами отъ членовъ  $X\sigma dO$  и, въ предѣлѣ, если послѣдніе интегралы будутъ приближаться къ конечнымъ величинамъ, то интегралы отъ дополнительныхъ членовъ будутъ приближаться къ нулю.

По этимъ причинамъ уравненія (1) параграфа 2-го получаютъ слѣдующій видъ:

$$\iiint \left( \frac{d^2x}{dt^2} - X \right) \sigma dO = \iint X_n dS, \dots \dots \dots (1, a, bis)$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} - \iiint (yZ - zY) \sigma dO = \iint (y_z Z_n - z_z Y_n) dS, \dots \dots (1, d, bis)$$

$$A_x = \iiint \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \sigma dO;$$

интегрированія распространены по объему и по поверхности части  $J_n$ .

Здѣсь выписаны только два уравненія, первое и четвертое, легко по нимъ написать и четыре остальныхъ.



Тѣла, состояща изъ многихъ частей, имѣть мѣсто, какъ для всего тѣла, такъ и для каждой изъ его, большой или малой.

Тѣла, состояща изъ частей, имѣющихъ конечные размѣры, не могутъ быть раздѣлены на части, имѣющія тотъ видъ, какъ они здѣсь написаны, или же къ ничтожно-малымъ частямъ тѣла, къ такимъ элементамъ, размѣры которыхъ неограниченно малы. Но, въ примѣненіи къ такимъ элементамъ, изъ равенствъ (1) можно сказать, предѣльные уравненія, поступая слѣдующимъ образомъ: раздѣляя эти равенства для элемента объема, предполагая его раздѣляемымъ на части, малыми, но ничтожно-малыми, и, перенеся всѣ члены въ первый членъ, располагаютъ члены каждаго уравненія по порядку ихъ малости, начиная отъ низшаго порядка. Положимъ, что это суть члены второго порядка малости; тогда для дѣлять объ части каждаго уравненія на величины, которыя, при приближеніи размѣровъ элемента и приближеніи ихъ къ нулю, становятся безконечно-малыми величинами второго же порядка; послѣ этого низшіе члены въ составленныхъ уравненіяхъ ставутъ нулевого порядка малости, т. е. конечными, тѣ члены, которые были 1-го порядка малости, стануть теперь 1-го порядка малости, бывшіе 4-го — 2-го, и т. д. При приближеніи размѣровъ элемента къ нулю, низшіе члены приближаются къ конечнымъ предѣламъ, прочіе — къ нулю. Полученныя такъ образомъ равенства и будутъ тѣ, объ которыхъ мы говоримъ теперь и которыя можно бы назвать предѣльными уравненіями для безконечно-малыхъ элементовъ рассматриваемого тѣла.

### § 9. Приближеніе уравненій (1) къ элементарному тетраэдру.

Подъ элементарнымъ тетраэдромъ подразумѣваемъ элементъ объема, ограниченный четырьмя гранями; три грани параллельны плоскостямъ координатъ, четвертая наклонна къ нимъ.

Пусть  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  суть длины взаимно-перпендикулярныхъ реберъ одного изъ подобныхъ тетраэдровъ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — координаты точки  $M$  пересѣченія этихъ реберъ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  = косинусы угловъ, составляемыхъ ребрами  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  съ осью координатъ.

Пусть  $K$  есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ  $M$  на грань  $ABC$ ; длину  $MK$  можно выразить такъ образомъ:

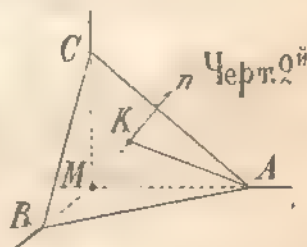
$$h = \overline{MK} = \lambda \Delta x = \mu \Delta y = \nu \Delta z,$$

такъ какъ эта равняется проеціи каждаго изъ реберъ  $MA$ ,  $MB$  и  $MC$  на направленіе перпендикуляра  $MK$ .

Величина каждой изъ граней  $MBC$ ,  $CMA$  и  $AMB$  равняется величинѣ проеціи площади  $ABC$  на соответственную плоскость координатъ; означивъ величину площади  $ABC$  черезъ  $\omega$ , выразимъ эти соотношенія такъ:

$$\frac{\nu \Delta z}{2} = \omega \lambda, \quad \frac{\lambda \Delta x}{2} = \omega \mu, \quad \frac{\mu \Delta y}{2} = \omega \nu.$$

Величина объема тетраэдра можетъ быть выражена одною шестою частью произведенія длинъ  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , или одною третью произведенія  $h\omega$ .



Означимъ черезъ  $F_n$  напряженіе, дѣйствующее въ точкѣ  $M$  на площадку, параллельную плоскости  $ABC$  и имѣющую вѣншею нормалью направленіе  $n$ ;  $X_n$ ,  $Y_n$ ,  $Z_n$  будутъ означать проэкціи этого напряженія на оси координатъ.

Напряженіе  $F_n(K)$ , дѣйствующее въ точкѣ  $K$  на единицу площади  $ABC$ , будетъ разниться отъ  $F_n$ , и по величинѣ, и по направленію, поэтому и проэкціи его  $X_n(K)$ ,  $Y_n(K)$ ,  $Z_n(K)$  на оси координатъ будутъ разниться отъ соотвѣтственныхъ величинъ  $X_n$ ,  $Y_n$ ,  $Z_n$  для точки  $M$ . Но, по предположенію § параграфа 5-го, эти проэкціи суть сплошныя функціи координатъ, поэтому  $X_n(K)$  можно выразить въ видѣ ряда, расположеннаго по возрастающимъ степенямъ разностей координатъ точекъ  $K$  и  $M$ , т. е. такъ:

$$X_n(K) = X_n + \frac{\partial X_n}{\partial x}(x_k - x) + \frac{\partial X_n}{\partial y}(y_k - y) + \frac{\partial X_n}{\partial z}(z_k - z) + \dots$$

гдѣ далѣе идутъ члены съ вѣншими степенями разностей координатъ; производнымъ отъ  $X_n$  по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  должно дать тѣ значенія, какія онѣ имѣютъ для точки  $M$ .

Очевидно, что  $(x_k - x)$  равно проэкціи длины  $MK$  на ось  $X$ -овъ, т. е.:  $x_k - x = h\lambda$ , и такимъ же образомъ:  $y_k - y = h\mu$ ,  $z_k - z = h\nu$ .

Поэтому  $X_n(K)$  можно выразить такъ:

$$X_n(K) = X_n + h\beta_1 + \dots$$

гдѣ  $\beta_1$  есть величина конечная; члены, означенные точками, будутъ имѣть множителями вторыя и вѣншія степени отъ  $h$ .

Далѣе, означимъ черезъ  $X_x$ ,  $Y_x$ ,  $Z_x$  проэкціи напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ  $M$  на площадку, перпендикулярную къ оси  $X$ -овъ и имѣющую положительную нормаль параллельную положительной оси  $X$ -овъ; это суть проэкціи напряженія, дѣйствующаго со стороны той части тѣла, которая находится по правую сторону плоскости  $YZ$  или  $VMC'$ , на часть тѣла, находящуюся влѣво отъ нея.

Такъ какъ молекулярныя силы подчиняются началу равенства и противоположности взаимно-дѣйствій, то напряженіе, дѣйствующее въ точкѣ  $M$  слѣва на право на плоскость  $YZ$ , имѣетъ проэкціями на оси координатъ величины:

$$-X_x, -Y_x, -Z_x.$$

Означимъ черезъ  $X_y$ ,  $Y_y$ ,  $Z_y$  проэкціи напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ  $M$  на площадку, перпендикулярную къ оси  $Y$ -овъ и имѣющую положительную нормалью направленіе параллельное положительной части этой оси; т. е., это суть проэкціи напряженія, дѣйствующаго со стороны той части тѣла, которая находится сзади плоскости  $ZX$ , на часть, находящуюся передъ этою плоскостью; наконецъ, означимъ черезъ  $X_z$ ,  $Y_z$ ,  $Z_z$  проэкціи напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ  $M$  на площадку перпендикулярную къ оси  $Z$ -овъ и имѣющую положительную нормалью положительную часть этой оси.

Составимъ теперь уравненіе (1, а) для одного этого элемента, предполагая его ничтожно-малымъ.



... по мѣрѣ приближенія размѣровъ элемента къ нулю, бу-  
... различныя:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\sigma \frac{dx dy dz}{6};$$

... въ точкѣ  $M$ , т. е. суть проекція на ось  $X$ -овъ ускоренія этой  
... силы въ ней же.

... уравненія будетъ состоять изъ суммы четырехъ членовъ, относя-  
... граней тетраэдра: для грани  $ABC$  наружная нормаль есть  $n$  или  
... для прочихъ же граней наружными нормальми служатъ направленія,  
... сторонамъ осей координатъ. По мѣрѣ приближенія раз-  
... къ нулю, вторая часть уравненія (1, а) будетъ приближаться къ слѣ-  
... :

$$X_n(K)\omega - X_x \frac{dy dz}{2} - X_y \frac{dz dx}{2} - X_z \frac{dx dy}{2},$$

$$X_n\omega + h\omega\beta_1 - X_x\omega\lambda - X_y\omega\mu - X_z\omega\nu.$$

Замѣчая, что въ равенствѣ:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\sigma \frac{h\omega}{3} = X_n\omega - X_x\omega\lambda - X_y\omega\mu - X_z\omega\nu + h\omega\beta_1 + \dots$$

... порядокъ малости — второй, раздѣливъ обѣ части его на величину того же  
... , а именно на  $\omega$ , тогда получимъ:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\sigma \frac{h}{3} = X_n - X_x\lambda - X_y\mu - X_z\nu + h\beta_1 + \dots$$

Предположимъ теперь, что размѣры тетраэдра приближаются къ нулю, причемъ  
...  $dy$  и  $dz$  къ  $dx$  остаются неизмѣнными, такъ что площадка  $ABC$  остается  
... параллельною самой себѣ по мѣрѣ приближенія ея къ точкѣ  $M$ . При обращеніи  $h$  въ  
... , предыдущее равенство обратится въ слѣдующее:

$$X_n = X_x\lambda + X_y\mu + X_z\nu \dots \dots \dots (14, a)$$

Примѣнивъ къ тетраэдру подобныя же образцы равенства (1, b) и (1, c), по-  
... еще два равенства:

$$Y_n = Y_x\lambda + Y_y\mu + Y_z\nu, \dots \dots \dots (14, b)$$

$$Z_n = Z_x\lambda + Z_y\mu + Z_z\nu \dots \dots \dots (14, c)$$

гдѣ  $\lambda, \mu, \nu$  суть косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ направленіемъ  
... положительной нормали  $n$  къ площадкѣ, проведенной черезъ точку  $M$ .

Слѣдовательно, если будемъ знать значенія величинъ:

$$X_x, Y_x, Z_x, X_y, Y_y, Z_y, X_z, Y_z, Z_z$$

для какой либо точки сплошного тѣла, то, при помощи формулы (14), будемъ имѣть возможность опредѣлить величины и направленіе напряженія  $F_n$ , относящагося въ той же точкѣ (и отнесеннаго къ единицѣ площади) на площадку, произвольно ориентированную, т. е. имѣющую нормалью произвольное направленіе.

Когда мы раздѣляемъ сплошное тѣло на безконечно-малые элементы объема плоскостями параллельными координатнымъ плоскостямъ прямоугольных прямолинейныхъ координатъ и если притомъ наружная поверхность тѣла не имѣетъ остроконечій, то мы можемъ всегда провести дѣлящія плоскости такимъ образомъ, что весь объемъ тѣла будетъ раздѣленъ на элементарные параллелепипеды и на безконечно-малые элементарные тетраэдры; послѣдніе будутъ находиться у поверхности тѣла, такъ что основанія ихъ будутъ элементами его поверхности. Къ каждому такому элементарному тетраэдру мы можемъ примѣнить предыдущія разсужденія, а слѣдовательно, и формулы (14), подразумѣвая подъ  $n$  направленіе наружной нормали, возстановленной изъ точки поверхности тѣла.

Слѣдовательно, формулы (14) могутъ быть примѣнены также и къ точкамъ наружной поверхности тѣла, причемъ подъ  $n$  должно подразумѣвать направленіе наружной нормали, возстановленной къ наружной поверхности изъ разсматриваемой точки, а подъ  $X_n$ ,  $Y_n$ ,  $Z_n$  — прожскія на оси координатъ соответствующаго напряженія, дѣйствующаго въ этой точкѣ на поверхность тѣла.

**§ 10. Формулы преобразованія интеграловъ, распространенныхъ по замкнутой поверхности, въ интегралы, распространенные по объему, ограничиваемому этою поверхностью.**

Пусть имѣемъ интегралъ:

$$\iiint \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz,$$

распространенный по объему, ограниченному нѣкоторою замкнутою поверхностью, гдѣ  $f$  есть какая либо функція отъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , сплошная и конечная для всѣхъ точекъ внутри и на поверхности объема.

Этотъ интегралъ весьма легко преобразовать въ интегралъ распространенный по всей поверхности, ограничивающей объемъ.

Для этого представимъ себѣ, что объемъ раздѣленъ на безконечно-тонкія призмь, длины которыхъ параллельны оси  $X$ -овъ, а сѣченія которыхъ плоскостями параллельными плоскости  $YZ$  суть элементарная площадки  $dy dz$ . Въ каждой изъ такихъ призмъ произведемъ интегрированіе:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz$$

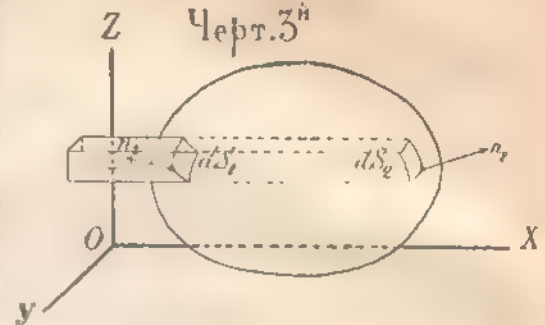
по  $x$ , по всѣмъ элементамъ, изъ которыхъ состоитъ эта призма, получимъ:

$$dy dz \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = dy dz (f_2 - f_1).$$



... зать  $dy dz$  для всей призмы одно и тоже по всей длинѣ ея. Величина  $f_2$  есть ... функций  $f$  на томъ элементѣ  $dS_2$  поверхности тѣла, который замыкаетъ призму ... ны, гдѣ  $x$  имѣетъ большую ... (см. черт. 3-й), а  $f_1$  есть зна- ... ции  $f$  на томъ элементѣ  $dS_1$ , ... а замыкаетъ призму съ той сторо- ...  $x$  имѣетъ меньшую величину, чѣмъ ... остальныхъ частяхъ призмы.

На чертежѣ 3-мъ изображена одна ... ая призма и элементы  $dS_2$  и  $dS_1$ ; ко- ... е, такихъ призмъ, на которыя раз- ... объёмъ, бесконечное множество,  $y$  ... какъ онѣ бесконечно точки.



Въстановимъ изъ элементовъ поверхности нормали  $n$  внаружу тѣла; по всѣхъ ... тыхъ, такихъ какъ  $dS_2$ , въ которыхъ направление параллельное положительной ... X-овъ выходить изъ объема, нормаль  $n_2$  будетъ составлять острый уголъ съ поло- ... жительною осью X-овъ; во всѣхъ же элементахъ такихъ какъ  $dS_1$ , въ которыхъ выше- ... нное направление входитъ въ объёмъ, нормаль  $n$  будетъ составлять тупой уголъ ... ложительною осью X-овъ; проекціи же каждаго двухъ элементовъ, принадле- ... одной и той же призмы, на плоскость YZ, равны площади сѣченія призмы, ... е.  $dy dz$ , такъ что:

$$dS_2 \cos (n_2 X) = dy dz \dots \dots \dots (15, a)$$

$$- dS_1 \cos (n_1 X) = dy dz \dots \dots \dots (15, b)$$

... е, равенства (15, a) имѣютъ мѣсто для всѣхъ элементовъ выхода, гдѣ уголъ ... X) острый, а равенство (15, b) — для всѣхъ элементовъ входа, гдѣ уголъ ... X) — тупой.

Поэтому:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz = f_2 \cos (n_2 X) dS_2 + f_1 \cos (n_1 X) dS_1,$$

... тельно:

$$\iiint \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz = \iint f_2 \cos (n_2 X) dS_2 + \iint f_1 \cos (n_1 X) dS_1,$$

... первый интегралъ второй части распространенъ на всѣ элементы выхода, второй — ... элементы входа; изъ совокупности тѣхъ и другихъ образуется вся поверхность ... а такъ какъ оба интеграла второй части по виду одинаковы, то получаемъ слѣ- ... равенство:

$$\iiint \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz = \iint f, \cos (nX) dS, \dots \dots \dots (16, a)$$

гдѣ интегралъ второй части распространенъ на всю поверхность объема,  $n$  есть нормаль къ элементу поверхности  $dS$ , направленная внаружу объема, а  $f_s$  = значеніе функции  $f$  въ элементѣ  $dS$ .

Подобнымъ же образомъ найдемъ двѣ другія формулы преобразованія:

$$\iiint \frac{\partial f}{\partial y} dx dy dz = \iint f_s \cos(nY) dS \dots\dots\dots (16, b)$$

$$\iiint \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz = \iint f_s \cos(nZ) dS \dots\dots\dots (16, c)$$

# § 11. Дифференціальныя уравненія для всѣхъ точекъ сплошнаго деформируемаго тѣла.

Во второй части уравненія (1, а) § 5-го замѣнимъ величину  $X_n$ , находящуюся подъ двойнымъ интеграломъ, слѣдующею суммою:

$$X_x \cos(nX) + X_y \cos(nY) + X_z \cos(nZ)$$

на основаніи равенства (14, а), затѣмъ преобразуемъ интегралы

$$\iint X_x \cos(nX) dS, \quad \iint X_y \cos(nY) dS, \quad \iint X_z \cos(nZ) dS$$

по формуламъ (16) въ интегралы, распространенные по объему части  $Jn$ ; тогда изъ (1, а, bis) получится такое равенство, заключающее только интегралъ распространенный по объему:

$$\iiint \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} - X \right] \sigma - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} \Big] dO = 0 \dots\dots (1, а, А)$$

Это равенство должно имѣть мѣсто какъ для всего тѣла, такъ и для всѣхъ частей его, даже для самыхъ малѣйшихъ, а для этого необходимо, чтобы во всякой точкѣ тѣла имѣло мѣсто дифференціальное уравненіе:

$$\sigma \frac{d^2 x}{dt^2} = X\sigma + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \dots\dots\dots (17, а)$$

Подобнымъ же образомъ изъ равенствъ (1, b) (1, c) выведемъ два другія дифференціальныя уравненія для той же точки:

$$\sigma \frac{d^2 y}{dt^2} = Y\sigma + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \dots\dots\dots (17, b)$$

$$\sigma \frac{d^2 z}{dt^2} = Z\sigma + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \dots\dots\dots (17, c)$$

Подъ точкою  $M$  здѣсь подразумѣвается всякая такая точка сплошнаго тѣла, которая можетъ быть центромъ безконечно-малаго элементарнаго параллелепипеда,



... тѣла; следовательно, для всякой точки тѣла, ...  
... безконечно-близко къ его наружной поверхности,  
... дифференціальныя уравненія вида (17, а, b, с),  
... на оси координатъ ускоренія этой точки, проэкции на  
... силъ въ этой точкѣ и производныя (по координатамъ)  
... действующихъ въ этой точкѣ на площадки, перпен-  
... координатъ.

... должны служить основными дифференціальными уравненіями теоріи упру-  
... гидродинамики.

... равенство (1, d, bis) и замѣнимъ подъ интеграломъ второй  
... и  $Z_{xx}$  выраженіями (14, b), (14, c); тогда она получитъ слѣ-

$$\iint (y_s Z_x - z_s Y_x) \cos (nX) dS + \iint (y_s Z_y - z_s Y_y) \cos (nY) dS + \\ + \iint (y_s Z_z - z_s Y_z) \cos (nZ) dS.$$

Каждый изъ этихъ интеграловъ преобразуемъ по соответственнымъ форму-  
ламъ въ интегралы по объему; первый, преобразованный по формулѣ (16, а),  
вытѣкаетъ въ:

$$\iiint (y \frac{\partial Z_x}{\partial x} - z \frac{\partial Y_x}{\partial x}) dO,$$

2. — по формулѣ (16, b), въ слѣдующій:

$$\iiint (y \frac{\partial Z_y}{\partial y} + Z_y - z \frac{\partial Y_y}{\partial y}) dO,$$

3. — по формулѣ (16, c), въ слѣдующій:

$$\iiint (y \frac{\partial Z_z}{\partial z} - z \frac{\partial Y_z}{\partial z} - Y_z) dO.$$

Подставимъ это равенство (1, d, bis) получить такой видъ:

$$\iiint y \left( \sigma \frac{d^2 x}{dt^2} - \sigma \mathfrak{A} - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) dO - \\ - \iiint z \left( \sigma \frac{d^2 y}{dt^2} - \sigma \mathfrak{B} - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) dO - \iiint (Z_y - Y_z) dO;$$

но во всякой точкѣ тѣла должны быть удовлетворены дифференціальныя уравненія (17, b) и (17, c), вслѣдствіе чего предыдущее равенство приметъ видъ:

$$\iiint (Z_y - Y_x) dO = 0;$$

а такъ какъ это должно имѣть мѣсто для всякой сколь угодно малой части тѣла, то слѣдовательно во всѣхъ точкахъ тѣла должно быть:

$$Z_y = Y_x \dots \dots \dots (18, a)$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$X_z = Z_x \dots \dots \dots (18, b)$$

$$Y_x = X_y \dots \dots \dots (18, c)$$

изъ равенствъ (1, e, f).

Надо принять во вниманіе, что направленія осей  $X$ -овъ,  $Y$ -овъ и  $Z$ -овъ могутъ быть измѣнены относительно тѣла, такъ что за эти оси можно принять три какія либо взаимно ортогональныя направленія; имѣя въ виду это замѣчаніе, мы можемъ изъ предыдущихъ уравненій вывести слѣдующее заключеніе.

*Напряженія  $F_n$  и  $F_k$ , дѣйствующія въ точкѣ  $M$  сплошнаго тѣла на двѣ взаимно-ортогональныя площадки, находятся между собою въ такой зависимости, что:*

$$F_n \cos (F_n, k) = F_k \cos (F_k, n), \dots \dots \dots (19, a)$$

гдѣ  $n$  и  $k$  означаютъ взаимно-ортогональныя направленія нормалей обѣихъ площадокъ.

Съ помощію же формулъ (14) и на основаніи равенствъ (18) можно показать, что такая зависимость существуетъ не только между напряжениями, дѣйствующими на двѣ взаимно-перпендикулярныя площадки, но и въ тѣхъ случаяхъ, когда эти площадки, проведенныя черезъ одну и ту же точку  $M$ , наклонены одна къ другой подъ какимъ бы то ни было угломъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\nu_1$  суть косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ нормалью  $k$  ко второй площадке и  $X_k$ ,  $Y_k$ ,  $Z_k$  — проеціи на оси координатъ напряженія  $F_k$ , дѣйствующаго на эту площадку. По формуламъ (14) найдемъ, что какъ:

$$F_n \cos (F_n, k) = X_n \lambda_1 + Y_n \mu_1 + Z_n \nu_1,$$

такъ и

$$F_k \cos (F_k, n) = X_k \lambda + Y_k \mu + Z_k \nu$$

окажутся равными суммѣ:

$$X_n \lambda \lambda_1 + Y_n \mu \mu_1 + Z_n \nu \nu_1 + Y_n (\mu \nu_1 + \nu \mu_1) + Z_n (\nu \lambda_1 + \lambda \nu_1) + X_n (\lambda \mu_1 + \mu \lambda_1),$$

— ну равны между собою:

$$F_n \cos (F_n, k) = F_k \cos (F_k, n) \dots \dots \dots (19)$$

— что значитъ, что если черезъ какую либо точку тѣла проведемъ двѣ какія  
— площадки, то проэкція на положительную нормаль второй площадки на-  
— прѣженія, дѣйствующаго на первую, равна проэкциі на положительную нормаль  
— той площадки напряженія, дѣйствующаго на вторую.

## II.

### Гидростатика.

#### § 12. Уравненія равновѣсія жидкостей.

Разсужденія и формулы предыдущей главы мы прижѣнимъ теперь къ ученію о  
— жидкостяхъ.

Подъ жидкостью мы понимаемъ такое сплошное деформируемое тѣло, ко-  
— торое въ состояніи равновѣсія не оказываетъ и не выдерживаетъ никакихъ тан-  
— генциальныхъ напряженій, ни натяженій, но можетъ выдерживать и само ока-  
— зывать только давленія.

Сколько извѣстно, всѣ жидкости при своемъ движеніи проявляютъ тангенціаль-  
— ные напряженія въ видѣ тренія между частями жидкости, а также между жидкостью и  
— твердыми тѣлами, съ которыми она граничитъ).

Подъ именемъ жидкостей мы будемъ подразумѣвать въ гидростатикѣ и гидроди-  
— намикѣ не только жидкія, но и еще газообразныя вещества. Для отличія первыхъ отъ  
— вторыхъ жидкихъ веществъ ихъ называютъ капельными жидкостями.

Въ большей части вопросовъ гидростатики капельныя жидкости можно предпола-  
— гать несжимаемыми, вслѣдствіе дѣйствительно малой сжимаемости ихъ подѣ вліяніемъ  
— обычныхъ вѣншихъ давленій.

Газы и тѣ жидкости, сжимаемость которыхъ приходится принимать въ расчетъ,  
— называются въ гидростатикѣ подѣ именемъ упругихъ жидкостей.

Прежде всего рассмотримъ слѣдствія, вытекающія изъ того предположенія, что  
— жидкости не оказываютъ тангенциальныхъ напряженій покоящаяся жидкость ни оказывать, ни испы-  
— тывать не можетъ.

Возьмемъ какую либо точку  $M$  внутри жидкости и проведемъ черезъ нее: какую  
— либо площадку съ положительною нормалью  $n$  и три площадки, параллельныя плоско-  
— стямъ координатъ.

Такъ какъ тангенциальныхъ напряженій нѣтъ, то напряженіе  $F_n$  направлено  
— по положительной нормали, либо по противоположному направленію; а, кромѣ  
— того, по той же причинѣ должны быть равны другъ:  $U_z$  и равная ей  $Z_y$ ,  $Z_x$  и равная  
— ей  $X_z$ ,  $X_y$  и равная ей  $Y_x$ , такъ какъ это сѣ проэкціи на оси координатъ танген-  
— циальныхъ напряженій на площадки перпендикулярныя къ осямъ.



Вслѣдствіе этого формулы (14,  $a, b, c$ ) для точекъ покоящейся жидкости обратятся въ слѣдующія:

$$X_n = X_x \lambda, \quad Y_n = Y_y \mu, \quad Z_n = Z_z \nu,$$

а такъ какъ напряженіе  $F_n$  направлено по положительной или отрицательной нормали  $n$ , то проэкція  $F_n$  на оси координатъ будутъ равны:

$$X_n = \pm F_n \lambda, \quad Y_n = \pm F_n \mu, \quad Z_n = \pm F_n \nu.$$

Сопоставивъ эти равенства съ предыдущими, найдемъ, что:

$$X_x = Y_y = Z_z = \pm F_n,$$

верхній знакъ относится къ тѣмъ случаямъ, когда напряженія суть натяженія, но таковыхъ жидкость ни оказывать, ни выдерживать, по предположенію, не можетъ, поэтому должно быть:

$$X_x = Y_y = Z_z = -F_n,$$

Это значить, что нормальныя давленія на всѣ четыре площадки одинаковы, несмотря на то что онѣ ориентированы различными образомъ.

Слѣдовательно, *разсчитанныя на единицу поверхности давленія, дѣйствующія на всякія площадки, проведенныя черезъ одну и ту же точку жидкости, равны между собою, какъ бы различно ни были направлены нормали этихъ площадокъ.*

Это, разсчитанное на единицу поверхности, давленіе жидкости называется *гидростатическимъ давленіемъ*; мы будемъ обозначать величину его черезъ  $p$ .

И такъ:

$$X_x = Y_y = Z_z = -p \dots \dots \dots (20)$$

$$X_n = -p\lambda, \quad Y_n = -p\mu, \quad Z_n = -p\nu, \dots \dots \dots (21)$$

гдѣ  $\lambda, \mu, \nu$  суть косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ положительною нормалю къ площадкѣ, проведенной черезъ точку  $M$  жидкости.

Въ различныхъ точкахъ жидкости гидростатическое давленіе различно и есть нѣкоторая сплошная функція отъ координатъ точки  $M$ .

Дифференціальныя уравненія (17) для покоящейся жидкости обратятся въ слѣдующія:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \sigma X \dots \dots \dots (22, a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \sigma Y \dots \dots \dots (22, b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \sigma Z, \dots \dots \dots (22, c)$$

которые должны имѣть мѣсто для всѣхъ точекъ жидкости.

Тогда такъ поверхности жидкости *внѣшнее* давленіе на элементъ ея поверхно-  
сти (давленіе извне) должно уравниваться съ давленіемъ самой  
жидкости въ этомъ же элементѣ (направленнымъ внаружу жидкости).

Примѣняя уравненія (22) къ покоящейся несжимаемой жидкости, въ части ко-  
торой имѣетъ равную температуру, должно считать  $\sigma$ , плотность жидкости, одинако-  
вой во всѣхъ частяхъ ея.

Примѣняя же уравненія (22) къ покоящимся упругимъ жидкостямъ, надо знать,  
существуетъ зависимость между плотностью и гидростатическимъ давленіемъ раз-  
личной жидкости. Для газовъ эта зависимость выражается приближенно такъ:

$$p = \frac{p_0}{\sigma_0} \sigma \dots \dots \dots (23, a)$$

Въ  $p$  есть какое либо определенное гидростатическое давленіе и  $\sigma_0$  — плотность, со-  
отвѣствующая этому давленію. Эта зависимость выражаетъ законъ Мариотта, кото-  
рый газы слѣдуютъ только приблизительно.

Во всякомъ случаѣ для каждой упругой жидкости должна существовать какая  
нибудь зависимость между  $p$  и  $\sigma$ ; пусть

$$\sigma = f(p) \dots \dots \dots (23)$$

гдѣ эта зависимость.

### § 13. Условія равновѣсія жидкости.

Не при всякихъ объемныхъ силахъ жидкость можетъ находиться въ равновѣсіи.  
Изъ уравненій равновѣсія (22) первыя части равенствъ суть частныя производныя по  
координатамъ отъ функціи  $p$ , сложной внутри жидкости; если жидкость несжимаемая,  
то  $\sigma$  есть величина постоянная во всѣхъ точкахъ жидкости, то проэкции на оси ко-  
ординатъ объемныхъ силъ должны удовлетворять слѣдующимъ дифференціальнымъ ура-  
вненіямъ:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} \dots \dots \dots (24)$$

Эти уравненія получаются такимъ образомъ: взявъ производную отъ уравненія  
(22, b) по  $z$  и производную отъ уравненія (22, c) по  $y$ , и вычтя второе изъ перваго  
получимъ:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial y} = 0 = \sigma \left( \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} \right),$$

откуда слѣдуетъ первое изъ уравненій (24).

Такимъ же условія для проэкцій объемной силы получимъ для возможности равно-  
вѣсія жидкости упругой. Въ этомъ случаѣ перенесемъ въ уравненіяхъ (22) плотность  
въ первыя части равенствъ и замѣнимъ  $\sigma$ , по формулѣ (23), функціею отъ  $p$ . Тогда  
эти уравненія можно будетъ представить подъ видомъ:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \mathfrak{X}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \mathfrak{Y}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = \mathfrak{Z}, \dots \dots \dots (25)$$

гдѣ  $\Pi$  есть функція отъ гидростатическаго давленія  $p$ , выражаемая интеграломъ

$$\Pi = \int_{f(p)}, \dots\dots\dots (26)$$

а такъ какъ  $p$  есть функція отъ  $x, y, z$  сплошная внутри жидкости, то и  $\Pi$  есть тоже функція отъ  $x, y, z$ , сплошная внутри жидкости.

Изъ уравненій (25) заключимъ, также какъ и для несжимаемой жидкости, что объемныя силы должны удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ (24).

Дифференціальныя уравненія (24) требуютъ, чтобы  $X, Y$  и  $Z$  были частными производными по  $x$ , по  $y$  и по  $z$  отъ какой либо функціи  $U$  отъ  $x, y, z$ :

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z} \dots\dots\dots (27)$$

Эта функція  $U$  называется *потенціальною функціею объемныхъ силъ*, а такіе объемныя силы называются *объемными силами*, или *имплицитными потенциалами*.

И такъ, какъ несжимаемая, такъ и упругія жидкости могутъ находиться въ покоѣ подъ вліяніемъ такихъ объемныхъ силъ, которыя имѣютъ потенциалъ.

Все, сказанное въ § 25-мъ кинетики матеріальной точки относительно потенциальной функціи силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ, относится такъ же къ потенциальной функціи объемныхъ силъ, а именно:

а) Черезъ каждую точку того пространства, внутри котораго потенциальная функція  $U$  имѣетъ дѣйствительныя значенія, можно провести *поверхность уровня*, на всѣхъ точкахъ которой  $U$  будетъ имѣть то же самое численное значеніе, какое имѣетъ и въ рассматриваемой точкѣ.

б) Направленіе объемной силы, дѣйствующей въ рассматриваемой точкѣ, перпендикулярно къ проходящей черезъ нее поверхности уровня и направлено въ сторону возрастающихъ параметровъ поверхностей уровня; величина объемной силы равна корню квадратному изъ суммы квадратовъ частныхъ производныхъ (27).

Подставивъ въ уравненія (22) вмѣсто проэкцій объемной силы частныя производныя (27), помноживъ эти уравненія соответственно на  $dx, dy$  и  $dz$  и сложивъ, получимъ:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \sigma \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right),$$

или

$$dp = \sigma dU,$$

такъ какъ  $p$  и  $U$  суть функція только отъ  $x, y, z$  и написанные выше тричлены суть полныя дифференціалы этихъ функцій.

Полученное дифференціальное уравненіе имѣетъ интеграль:

$$p = \sigma U + \Gamma, \dots\dots\dots (28)$$

гдѣ  $\Gamma$  — произвольная постоянная.



Из полученнаго интеграла (28) видно, что  $p$ , дѣленное на  $\sigma$ , отличается отъ  $U$  только на постоянную величину ( $\Gamma/\sigma$ ) и что, слѣдовательно, во всѣхъ точкахъ одной и той же поверхности уровня потенциальной функции гидростатическое давленіе для несжимаемой жидкости имѣетъ одну и ту же величину; то есть, поверхности уровня суть вмѣстѣ съ тѣмъ и поверхности одинаковаго гидростатическаго давленія.

Отсюда слѣдуетъ, что если несжимаемая покоящаяся жидкость имѣетъ свободу перемѣщенія, то эта поверхность должна быть поверхностью уровня тѣхъ объемныхъ силъ, которыми подвержена жидкость.

Идемъ къ разсмотрѣнію условій равновѣсія жидкости упругой.

Изъ уравненій (25) получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$d\Pi = dU,$$

откуда имѣетъ интегралъ:

$$\Pi = U + \Gamma \dots \dots \dots (29)$$

Такъ какъ  $\Pi$  есть функція только отъ  $p$ , то изъ (29) слѣдуетъ:

$$p = F(U + \Gamma), \dots \dots \dots (30)$$

т. е.  $F$  есть функція обратная функціи  $\Pi$  отъ  $p$ ; даѣе, изъ равенства (23) найдемъ уравненіе для  $\sigma$ :

$$\sigma = f(F(U + \Gamma)) \dots \dots \dots (31)$$

Изъ равенствъ (30) и (31) видно, что тамъ, гдѣ  $U$  постоянно, тамъ постоянны и  $p$  такъ и  $\sigma$ , т. е. во упругой покоящейся жидкости поверхности уровня потенциальной функции объемныхъ силъ суть вмѣстѣ съ тѣмъ поверхности равноудаленія гидростатическаго давленія и поверхности одинаковой плотности.

Если упругая жидкость подчиняется закону Мариотта, то

$$f(p) = \frac{\sigma_0}{p_0} p, \quad \Pi = \frac{p_0}{\sigma_0} \log p,$$

поэтому формулы (30) и (31) получаютъ тогда слѣдующій видъ:

$$p = K e^{\mu \Pi}, \quad \sigma = \mu K e^{\mu \Pi}, \dots \dots \dots (32)$$

или

$$\mu = \frac{\sigma_0}{p_0}, \quad K = e^{\mu \Gamma}.$$

#### § 14. Равновѣсіе тяжелой несжимаемой жидкости въ сосудахъ. Давленіе на дно и стѣнки сосуда. Давленіе на плоскую стѣнку. Центръ давленія.

Пусть какая либо тяжелая несжимаемая жидкость находится въ какомъ либо сосудѣ. Расположимъ положительную ось  $Y$ -овъ по направленію силы тяжести, оси

$X$ -овъ и  $Z$ -овъ горизонтально. Такъ какъ проеція на эти оси силы тяжести, разсчитанной на единицу массы, суть:

$$X = 0, Y = g, Z = 0,$$

то потенціальная функція этой силы будетъ:  $U = gy$ .

Примѣнивъ сюда формулу (28) предыдущаго параграфа, будемъ имѣть для равновѣсія тяжелой несжимаемой жидкости слѣдующее выраженіе гидростатическаго давленія:

$$p = \sigma gy + \Gamma \dots \dots \dots (33)$$

Откуда слѣдуетъ, что поверхности равнаго давленія покоящейся тяжелой жидкости суть горизонтальныя плоскости.

Если во всѣхъ точкахъ свободной части поверхности вѣншаго давленіе имѣетъ одну и ту же постоянную величину, то эта часть поверхности будетъ горизонтальна. Пусть  $P$  есть величина вѣншаго давленія на эту поверхность, въ плоскости которой помѣстимъ начало координатъ: въ такомъ случаѣ  $\Gamma$  должно быть равно  $P$  и выраженіе (33) получать слѣдующій видъ:

$$p = \sigma gy + P \dots \dots \dots (33. a)$$

Давленіе жидкости, находящейся въ сосудѣ, на какой либо ничтожно-малый элементъ дна или стѣнокъ сосуда направлено по нормали къ этому элементу, проведенной внаружу жидкости.

Если дно сосуда горизонтально, то полное давленіе жидкости на всю поверхность его будетъ равно:

$$PS + \sigma gyS,$$

если  $S$  есть величина поверхности дна,  $h$  — глубина его подъ горизонтомъ свободной поверхности.

Если часть стѣнки сосуда имѣетъ видъ плоской, хотя и негоризонтальной фигуры, то совокупность всѣхъ гидростатическихъ давленій жидкости на эту плоскую фигуру будетъ совокупностью параллельныхъ между собою и перпендикулярныхъ къ плоскости стѣнки силъ, приложенныхъ ко всѣмъ элементамъ этой площади.

Такъ какъ совокупность параллельныхъ и одинаково направленныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, всегда можетъ быть уравновѣшена одною силою или приведена къ одной силѣ, то и совокупность гидростатическихъ давленій на плоскую стѣнку можетъ быть приведена къ одной силѣ. Величина этой силы равна суммѣ гидростатическихъ давленій на всю плоскую фигуру, а точка приложенія равнодѣйствующей этихъ параллельныхъ силъ называется *центромъ гидростатическихъ давленій* на эту плоскую фигуру. Мы теперь покажемъ, какъ вычисляется величина равнодѣйствующей такихъ давленій и мѣсто центра ихъ.

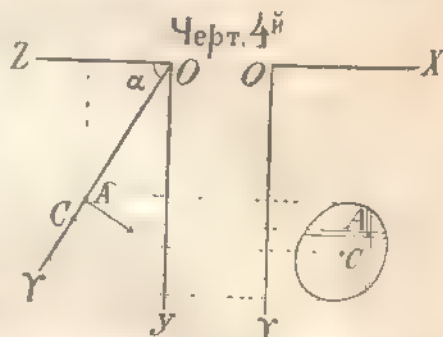
Для упрощенія вычисленій расположимъ плоскость  $XZ$  по въ свободной поверхности, но въ такой горизонтальной плоскости, въ которой оно было бы равно нулю, если бы гидростатическое давленіе убывало вверхъ отъ свободной поверхности по тому же закону, по какому оно прибываетъ внизъ. Можно сказать еще иначе: пред-

...  $P$  на свободную поверхность удалено, и взять его на ... той же самой жидкости, на новую свободную поверхность ... а толщина слоя такова, что онъ на прежнюю сво- ... гидростатическое давленіе равно  $P$ ; толщина этого ...

$$\frac{P}{\sigma g}$$

... новое начало координатъ и новую ось  $X$ -овъ въ плоско- ... которую желаемъ опредѣлить давленіе, а кромѣ оси  $OY$  возь- ...  $OY$ , перпендикулярную къ оси  $X$ -овъ и заключающуюся въ

... 4-мъ изображены: слева — ... и плоской фигуры, а также ... вертикальною плоскостью  $ZOY$ , ... плоскость  $XOY$  и видъ ... (какой бы то ни было), на ... давленіе.



... плоскую фигуру на безконеч- ... элементы прямыми, параллельными ...  $X$ -овъ и  $Y$ -овъ. Пусть  $A$  есть одинъ ... элементовъ,  $x$  и  $y$  — координаты ... осей  $OX$  и  $OY$ ,  $dx dy$  —

... его площади.  $y \sin \alpha$  — координата его по оси  $Y$ -овъ, подразумевая ... уголъ, составляемый плоскостью фигуры съ горизонталъ. Гидростатическое да- ... этотъ элементъ будетъ равно теперь площади его, умноженной на  $\sigma g y$ , такъ ... гидростатическое давленіе въ плоскости  $XZ$  есть нуль.

... поэтому сумма или главный векторъ гидростатическихъ давленій на всю площадь ... равна:

$$B = \sigma g \sin \alpha \iint y dx dy,$$

... интегралъ распространенъ на всю площадь фигуры.

... этотъ интегралъ выражаетъ величину статического момента площади относи- ... оси  $X$ -овъ и слѣдовательно равняется величинѣ площади, умноженной на раз- ...  $y_c$  центра тяжести  $C$  площади отъ оси  $X$ -овъ, такъ что:

$$B = \sigma g \sin \alpha \cdot S y_c = \sigma g S y_c, \dots \dots \dots (34)$$

... величина площади,  $y_c$  — разстояніе центра тяжести ея отъ плоскости  $XZ$ .

Слѣдовательно, полное давленіе жидкости на наклонную плоскую площадь ... давленію на такую же горизонтальную площадь, находящуюся на той же ... глубинѣ, на какой находится центръ тяжести наклонной площади.

Для опредѣленія положенія центра давленій, т. е. центра параллельныхъ силъ, ... составить главные моменты давленій вокругъ осей  $OX$  и  $OY$  и приравнять ихъ



соответствующимъ моментамъ главнаго вектора  $B$ , приложеннаго къ этой точкѣ  $C$ . Главные моменты всей совокупности силъ вокругъ сказанныхъ осей выразятся такъ:

$$\iint p\eta \, dx \, d\eta, \quad \iint p x \, dx \, d\eta,$$

гдѣ  $p = \sigma g \eta \sin \alpha$ ; а если  $x_c$  и  $\eta_c$  суть координаты искомаго центра давленій, то моменты приложеннаго къ нему главнаго вектора  $B$  будутъ:  $B\eta_c$  и  $Bx_c$ . Поэтому:

$$B\eta_c = \sigma g \sin \alpha \iint \eta^2 \, dx \, d\eta, \dots \dots \dots (35, a)$$

$$Bx_c = \sigma g \sin \alpha \iint x\eta \, dx \, d\eta \dots \dots \dots (35, b)$$

Интегралы, заключающіеся во вторыхъ частяхъ этихъ выраженій суть: тотъ, который находится въ (35, a), выражаетъ моментъ инерціи площади вокругъ оси  $X$ -овъ; тотъ-же, который находится въ (35, b), выражаетъ произведение инерціи площади относительно осей  $X$  и  $Y$ .

Изъ выраженій (35, a), (35, b) и (34) слѣдуютъ выраженія:

$$\eta_c = \frac{\iint \eta^2 \, dx \, d\eta}{S\eta_c}, \quad x_c = \frac{\iint x\eta \, dx \, d\eta}{S\eta_c},$$

изъ которыхъ видно, что положеніе центра давленій  $C$  на площади не зависитъ отъ того, подъ какимъ угломъ  $\alpha$  наклонена площадь къ горизонту.

Означимъ черезъ  $x$  и  $y$  координаты точекъ площади относительно осей, параллельныхъ осямъ  $OX$ ,  $OY$ , но проведенныхъ черезъ центръ  $C$  инерціи площади; примемъ въ расчетъ, что статические моменты площади относительно новыхъ осей равны нулю и означимъ черезъ  $A_c$  моментъ инерціи площади относительно новой оси  $X$ -овъ и черезъ  $F_c$  — произведение инерціи относительно новыхъ же центральныхъ осей. Какъ намъ уже извѣстно:

$$\iint \eta^2 \, dx \, d\eta = S\eta_c^2 + A_c,$$

а теперь легко найдемъ слѣдующее равенство:

$$\iint x\eta \, dx \, d\eta = Sx_c\eta_c + F_c,$$

если подставимъ подъ интеграломъ  $(x_c + x)$  вмѣсто  $x$  и  $(\eta_c + y)$  — вмѣсто  $\eta$ .

Поэтому предыдущія выраженія для  $x_c$  и  $\eta_c$  обратятся въ слѣдующія:

$$\eta_c = \eta_c + \frac{A_c}{S\eta_c} \dots \dots \dots (36, a)$$

$$x_c = x_c + \frac{F_c}{S\eta_c} \dots \dots \dots (36, b)$$

Изъ этихъ формулъ выражается, что центръ давленій находится на оси  $OX$ : площади вокругъ оси привѣса  $OX$ .

### § 15. Совокупность давленій жидкости на погруженное тѣло. Законъ Архимеда.

Давленіе несжимаемой покоящейся жидкости, подверженной силѣ тяжести, на ка-  
кую-либо поверхность, есть совокупность нормальныхъ гидростатическихъ давленій,  
действующихъ на всѣ элементы этой поверхности.

Поставимъ выраженія проекцій главнаго вектора и главнаго момента гидростати-  
ческихъ давленій на всю поверхность тѣла, вполнѣ погруженнаго въ жидкость.

Пусть  $dS$  есть одинъ изъ элементовъ поверхности тѣла,  $x_s, y_s, z_s$  — его коорди-  
наты; означимъ черезъ  $N$  направленіе нормали къ поверхности тѣла, проведенной изъ  
элемента  $dS$  внаружу тѣла и, значитъ, внутрь жидкости.

Проекціи на оси координатъ силы гидростатическаго давленія, приложенной къ  
элементу  $dS$  будутъ:

$$-p_s \cos (N, X) dS, \quad -p_s \cos (N, Y) dS, \quad -p_s \cos (N, Z) dS,$$

а проекціи главнаго вектора и главнаго вокругъ начала координатъ момента со-  
вокупности давленій на всю поверхность выразятся слѣдующими интегралами:

$$B_x = - \iint p_s \cos (N, X) dS, \dots \dots \dots (37, a)$$

$$B_y = - \iint p_s \cos (N, Y) dS, \dots \dots \dots (37, b)$$

$$B_z = - \iint p_s \cos (N, Z) dS, \dots \dots \dots (37, c)$$

$$I_x = \iint p_s (y_s \cos (N, Z) - z_s \cos (N, Y)) dS, \dots \dots \dots (38, a)$$

$$I_y = - \iint p_s (z_s \cos (N, X) - x_s \cos (N, Z)) dS, \dots \dots \dots (38, b)$$

$$I_z = - \iint p_s (x_s \cos (N, Y) - y_s \cos (N, X)) dS \dots \dots \dots (38, c)$$

Интегралы распространены на всю замкнутую поверхность вполнѣ погруженнаго въ  
жидкость тѣла.

Преобразуемъ теперь эти интегралы по формуламъ (16) § 10-го предыдущей  
главы въ интегралы, распространенные по всему объему погруженнаго тѣла; по преже-  
му мы предположимъ, что значенія  $p$  на поверхности равнаго давленія продолжены  
въ тѣло по тому же закону, какому они слѣдуютъ въ жидкости, то есть, что во  
всѣхъ точкахъ внутри тѣла мы даемъ функціи  $p$  то самое значеніе, которое оно имѣло

бы, если бы чѣсто тѣла занимала покоющаяся несжимаемая жидкость, такая же самая, въ вакуум погружено тѣло.

Вслѣдствие этого преобразования, формулы (37, а) и (38, а) получаютъ слѣдующій видъ:

$$B_x = - \iiint \frac{\partial p}{\partial x} dO; \quad I_x = - \iiint (y \frac{\partial p}{\partial z} - z \frac{\partial p}{\partial y}) dO;$$

но для тяжелой несжимаемой жидкости, находящейся въ покой, частныя производныя отъ  $p$  по  $x$  и по  $z$  равны нулю, а

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \sigma g,$$

если ось  $Y$  ось направлена параллельно силѣ тяжести.

Совершивъ преобразованія по формуламъ (16) надъ выраженіями (37, и (38), мы, слѣдовательно, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= 0, \\ B_z &= -\sigma g V, \end{aligned} \right\} \dots (39) \quad \left. \begin{aligned} I_x &= \sigma g \iiint z dO = \sigma g V x_0, \\ I_y &= 0, \\ I_z &= -\sigma g \iiint x dO = -\sigma g V x_0, \end{aligned} \right\} \dots (40)$$

гдѣ:

$$V = \iiint dO$$

есть величина объема погруженнаго тѣла, а интегралы въ выраженіяхъ  $I_x$  и  $I_z$  суть величины статическихъ моментовъ этого объема относительно плоскостей  $XU$  и  $YZ$ ;  $x_0$  и  $z_0$  суть координаты центра инерціи массы однородной плотности, заполняющей объемъ  $V$ .

Какъ извѣстно изъ статики твердаго тѣла, совокупность какихъ либо силъ, приложенныхъ къ *твердому* тѣлу, можно уравновѣсить вообще двумя силами; если же главный моментъ совокупности силъ перпендикуляренъ къ главному вектору, то тогда совокупность силъ можетъ быть уравновѣщена только одною силою.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $B_x, B_y, B_z$  суть проэкціи на оси координатъ главнаго вектора  $B$  совокупности силъ, приложенныхъ къ *твердому* тѣлу, а  $I_x, I_y, I_z$  — проэкціи главнаго момента  $I$  этой совокупности вокругъ начала координатъ.

Положимъ, что силы, приложенныя къ точкамъ свободнаго твердаго тѣла, не уравновѣшиваются между собою, т. е., что всѣ или нѣкоторые изъ шести величинъ:

$$B_x, B_y, B_z, I_x, I_y, I_z$$

не равны нулю; спрашивается, вѣльзя ли уравновѣсить эту совокупность силъ одною силою, приложенною къ вѣкоторой точкѣ того же тѣла?



и через  $X, Y, Z$  проекции искомой силы на оси координат и через  $x, y, z$  координаты точки ее приложения.

Данная совокупность сил уравновѣсилась этой силой, необходимо, чтобы были выполнены равенства:

$$\begin{aligned} X + B_x &= 0, \quad Y + B_y = 0, \quad Z + B_z = 0, \\ I_x + yZ - zY &= 0, \quad I_y + zX - xZ = 0, \quad I_z + xY - yX = 0. \end{aligned}$$

Из них можно составить слѣдующее равенство:

$$I_x + B_y I_y + B_z I_z = X(zY - yZ) - Y(xZ - zX) - Z(yX - xY),$$

правая часть котораго, очевидно, равна нулю; поэтому и первая часть его должна быть нулем, если данную совокупность сил можно уравновѣсить одною силой.

Следовательно, для того, чтобы данную совокупность сил, приложенных к одному твердому тѣлу, можно было уравновѣсить одною силой, необходимо, чтобы было удовлетворено условіе:

$$B_x I_x + B_y I_y + B_z I_z = 0, \quad (41)$$

чтобы главный момент и главный вектор данной совокупности сил были перпендикулярны и чтобы при этом главный вектор не былъ равенъ нулю.

Изъ выражений (39) и (40) оказывается, что главный вектор и главный момент гидростатическихъ давленій на поверхность вполнѣ погруженного тѣла взаимно-перпендикулярны; изъ этого слѣдуетъ, что если вполнѣ погруженное во жидкость тѣло будетъ тѣсрое, то совокупность гидростатическихъ давленій на его поверхность можетъ быть уравновѣшена одною силой.

Изъ выражений (39) и (40) прямо видно, что величины уравновѣшивающей силы равны  $\rho g V$ , т. е. вѣсу вытѣсняемаго тѣломъ объема жидкости, что направление ея совпадаетъ съ направлениемъ силы тяжести и что точка приложения этой силы должна падать съ центромъ  $C$  инерціи объема  $V$ .

Слѣдовательно, гидростатическія давленія на поверхность твердаго тѣла, вполнѣ погруженнаго въ тяжелую несжимаемую покоящуюся жидкость, приводятся къ одной силѣ, направленной снизу вверхъ, равной вѣсу вытѣсняемаго тѣломъ объема жидкости и приложенной къ центру тяжести объема; это и есть знаменитый законъ Архимеда.

Разсмотримъ теперь какъ выражаются главный вектор и главный моментъ совокупности гидростатическихъ давленій и давленій атмосферы на тѣло не вполнѣ погруженное въ покоящуюся жидкость.

Мы предположимъ, что та часть поверхности тѣла, которая не находится въ жидкости, выступаетъ изъ нея, подвержена тому же самому вѣншему давленію  $P$  на единицу поверхности, какому подвержена свободная поверхность жидкости. Въ дѣйствительности такъ именно и дѣйствуетъ давленіе атмосферы.

Въ такомъ случаѣ проекціи главного вектора вѣхъ давленій на поверхность тѣла и главного момента ихъ выразятся интегралами (37) и (38), распространенными на всю

поверхность тѣла, но только надо имѣть въ виду, что во всѣхъ элементахъ поверхности, подвергающихся давленію атмосферы, давленіе  $p$ , имѣетъ одинаковую величину  $P$ .

Произведя надъ интегралами (37) и (38) преобразование по формуламъ (16-мъ), мы должны теперь предположить, что внутри той части объема тѣла, которая находится выше продолженной внутрь тѣла свободной поверхности жидкости,  $p$  имѣетъ постоянную величину  $P$ ; вслѣдствіе этого производная отъ  $p$  по  $y$  въ этой части объема тѣла равна нулю, а въ остальной части объема, находящейся ниже продолженной свободной поверхности, по прежнему:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \sigma g.$$

По этимъ причинамъ проекція главного вектора и главного момента гидростатическихъ и атмосферныхъ давленій на поверхность не вполне погруженного въ жидкость тѣла выразятся опять формулами (39) и (40), но теперь  $V$  выражаетъ объемъ не всего тѣла, а только измѣщающій жидкость объемъ, т. е. ту часть объема тѣла, которая находится ниже уровня свободной поверхности;  $x_c$  и  $z_c$  суть координаты центра тяжести этого объема.

Если полупогруженное въ покоящуюся несжимаемую жидкость тѣло есть твердое, то совокупность всѣхъ гидростатическихъ и атмосферныхъ давленій на поверхность тѣла приводится къ одной силѣ, направленной снизу вверхъ, равной вѣсу измѣщенного объема жидкости и приложенной къ центру тяжести измѣщенного объема.

## § 16. Условія равновѣсія и устойчивости равновѣсія тяжелаго твердаго тѣла, плавающего въ несжимаемой тяжелой покоящейся жидкости.

Для равновѣсія тяжелаго твердаго тѣла, плавающего въ тяжелой жидкости, необходимо:

1) чтобы вѣсъ жидкости, вытѣсненной погруженной частью тѣла, былъ равенъ вѣсу тѣла;

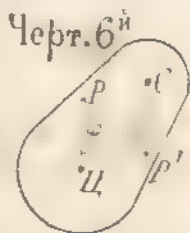
2) чтобы центръ  $C$  тяжести тѣла былъ на одной вертикальной линіи съ центромъ  $\Pi$  измѣщенного объема жидкости.

Твердое тѣло, удѣльный вѣсъ котораго равняется удѣльному вѣсу жидкости, будетъ въ равновѣсіи, когда оно будетъ вполне погружено въ жидкость и когда центръ  $C$  его тяжести и центръ тяжести  $\Pi$  его объема будутъ на одной вертикальной линіи, потому что тогда главный векторъ и главный моментъ всѣхъ силъ приложенныхъ къ тѣлу равны нулю.

Такое положеніе равновѣсія будетъ устойчивымъ тогда, когда центръ  $\Pi$  будетъ выше центра тяжести тѣла  $C$  и будетъ неустойчивымъ въ противоположномъ случаѣ. Въ самомъ дѣлѣ, въ первомъ случаѣ, при отклоненіи линіи  $\Pi C$  отъ вертикальнаго положенія, пара силъ  $\Pi P$  и  $C P'$  (черт. 5) будетъ стремиться уменьшать уголъ  $\phi$ , во второмъ же случаѣ (черт. 6) будетъ стремиться увеличить этотъ

уголъ, т. е. опрокинуть тѣло ( $C P'$  изображаетъ вѣсъ тѣла).

Относительно же всякихъ поступательныхъ перемѣщеній тѣла оба положенія равновѣсія безразличны, пока тѣло не выступаетъ изъ жидкости.



Можно сказать, что твердое тѣло, удѣльный вѣсъ котораго равенъ удѣльному вѣсу жидкости, будучи погружено въ нее, имѣетъ два положенія равновѣсія, одно устойчивое, другое неустойчивое.

Если тѣло, удѣльный вѣсъ котораго менѣе удѣльнаго вѣса жидкости, имѣетъ форму шара, а большею частію нѣсколько положеній равновѣсія, для опредѣленія которыхъ поступаютъ нижеслѣдующимъ образомъ.

Сначала всего слѣдуетъ провести плоскость  $AB$  (черт. 7), отдѣляющую отъ тѣла часть  $ADB$  (черт. 7, на которомъ изображены сѣченія тѣла и поверхностей, объ которыхъ идетъ рѣчь впереди, плоскостью чертежа) объемъ  $ADB$ , величина котораго  $V$  должна равняться величинѣ отношенія:

$$V = \frac{M}{\sigma},$$

$M$  — масса тѣла,  $\sigma$  — плотность жидкости.

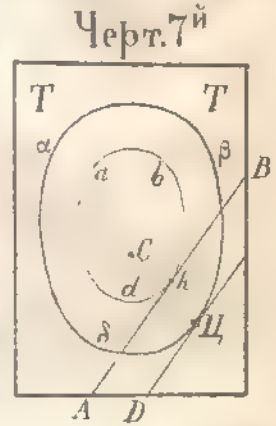
Очевидно, что можно провести безчисленное множество такихъ плоскостей, удовлетворяющихъ этому требованію и что всѣ такіа плоскости обвертываютъ нѣкоторую поверхность, которую мы назовемъ *поверхностью плаванія* (пусть  $abd$  представляетъ линію пересѣченія этой поверхности плоскостью чертежа 7-го): сѣкуція плоскости плаванія будемъ называть *плоскостями плаванія*.

Положенія центра инерціи  $C$  отсѣченного объема  $ADB$ , соответствующія всевозможнымъ положеніямъ плоскости плаванія по отношенію къ тѣлу, образуютъ собою другую поверхность, называемую *поверхностью центровъ*. (На черт. 7-мъ линія  $\alpha\beta\delta$  изображаетъ кривую пересѣченія этой поверхности плоскостью чертежа).

Если соединить центръ инерціи  $C$  тѣла съ какою-либо точкою  $\Pi$  поверхности центровъ прямою  $C\Pi$ , то, вообще говоря, эта прямая не будетъ перпендикулярна къ соответствующей плоскости плаванія  $AB$ . Поэтому, если помѣстить тѣло въ жидкость такъ, чтобы какая бы то ни было плоскость плаванія  $AB$  совместилась съ уровнемъ одной поверхности, то тѣло въ этомъ положеніи въ равновѣсіи не останется, потому что центры  $C$  и  $\Pi$  не находятся на одной вертикальной линіи.

Однако, найдутся навѣрно два, а можетъ быть и болѣе такихъ положеній для  $\Pi$ , въ которыхъ прямая  $C\Pi$  окажется перпендикулярною къ соответствующей плоскости плаванія. Такія положенія точки  $\Pi$  и плоскости плаванія соответствуютъ положеніямъ равновѣсія тѣла.

Если поверхность тѣла болѣе или менѣе правильна и имѣетъ симметрію относительно трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, или есть поверхность вращенія, и если центръ тяжести  $C$  тѣла находится на одной изъ осей пересѣченія этихъ плоскостей или на оси вращенія, то нѣкоторые изъ положеній равновѣсія тѣла очевидны безъ построенія поверхностей сѣченій и центровъ. Такъ, напримѣръ, понятно само собою, что для однороднаго эллипсоида о трехъ осяхъ и для всякаго однороднаго шара, имѣющаго три плоскости симметріи, возможны шесть положеній равновѣсія, въ каждомъ изъ которыхъ плоскость плаванія параллельна одной изъ плоскостей симметріи. Для однороднаго тѣла вращенія, имѣющаго, кромѣ оси симметріи, еще экваторъ,



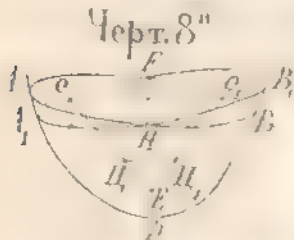


риальную плоскость симметріи (эллипсоидъ вращенія, круговой цилиндръ, и т. п.) возможны положенія равновѣсія: вертикальное и безчисленное множество горизонтальныхъ. Для однороднаго шара число положеній равновѣсія безконечно-велико, такъ какъ во всякомъ его положеніи центръ инерціи погруженной части будетъ на одной вертикальной линіи съ центромъ тяжести однороднаго шара.

Возьмемъ теперь неоднородный эллипсоидъ, центръ тяжести котораго находится на большой оси его, но не въ центрѣ. Въ этомъ случаѣ очевидны два положенія равновѣсія, при которыхъ большая ось эллипсоида будетъ вертикальна; но существуютъ ли еще положенія и каковы они. — для отвѣта на эти вопросы придется строить или определять видъ поверхностей сѣченій и центровъ.

Полное опредѣленіе всѣхъ возможныхъ положеній равновѣсія значительно облегчается при помощи слѣдующей теоремы.

*Касательныя плоскости къ поверхности центровъ параллельны плоскостямъ плаванія, соответствующимъ точкамъ касанія.*



Нетрудно доказать эту теорему. Пусть  $AB$  (черт. 8) есть какое либо положеніе плоскости плаванія,  $\Pi$  — соотвѣтственная ей точка поверхности центровъ. Проведемъ какое либо другое сосѣднее положеніе  $A_1B_1$  плоскости плаванія и пусть  $\Pi_1$  — соотвѣтственная точка поверхности центровъ. Оба положенія плоскости пересекаются по прямой  $FN$ .

Оба объема  $ABD$  и  $A_1B_1D_1$  равны между собою; и такъ какъ они имѣютъ общую часть:  $A_1FBDNA_1$ , то и объемы клинообразныхъ частей:  $AFNA_1$  и  $BNFB_1$  равны между собою. Пусть  $E$  есть центръ инерціи объема  $A_1FBDNA_1$ ,  $e$  — центръ инерціи клина  $AFNA_1$  и  $e_1$  — центръ инерціи клина  $BNFB_1$ . Такъ какъ объемъ  $ABD$ , отсѣаемый первымъ положеніемъ плоскости плаванія, равенъ суммѣ объемовъ клина  $AFNA_1$  и общей части  $A_1FBDNA_1$ , то центры инерціи  $e$ ,  $\Pi$ ,  $E$  должны лежать на одной прямой и отношеніе величинъ разстояній  $\Pi e$  и  $E\Pi$  должно равняться величинѣ отношенія объема общей части  $A_1FBDNA_1$  къ объему клина. По такой же самой причинѣ и центры инерціи  $e_1$ ,  $\Pi_1$  и  $E$  должны тоже лежать на одной прямой и отношеніе разстояній  $\Pi_1 e_1$  и  $E\Pi_1$  должно равняться величинѣ отношенія объема  $A_1FBDNA_1$  къ объему клина; слѣдовательно:

$$\frac{\Pi e}{E\Pi} = \frac{\Pi_1 e_1}{E\Pi_1}$$

и стало быть прямая  $\Pi\Pi_1$  параллельна прямой  $ee_1$ .

Представимъ себѣ теперь, что мы приближаемъ положеніе  $A_1B_1$  плоскости плаванія до совпаденія съ положеніемъ  $AB$ : соответственно этому и точка  $\Pi_1$  поверхности центровъ будетъ сближаться съ точкою  $\Pi$ , причемъ направленіе  $\Pi\Pi_1$  будетъ приближаться къ совпаденію съ касательною плоскостью, проведенною къ поверхности центровъ въ точкѣ  $\Pi$ , а въ предѣлѣ она и ляжетъ въ эту поверхность. По мѣрѣ того же приближенія плоскости  $A_1B_1$  къ плоскости  $AB$ , точки  $e_1$  и  $e$  сближаются съ послѣднею и въ предѣлѣ прямая  $ee_1$  совпадаетъ съ плоскостью  $AB$ . Имѣя въ виду, что и въ предѣлѣ направленія  $ee_1$  и  $\Pi\Pi_1$  параллельны между собою и что сказанное намъ относится къ точкамъ  $\Pi_1$  (и къ соотвѣтственнымъ плоскостямъ  $A_1B_1$ ), взятыхъ в

дѣйствию съ  $\Pi$ , мы можемъ заключить, что дѣйствительно  
 — поверхность центровъ въ  $\Pi$  параллельна плоскости пла-

вы, слѣдуетъ, что *положеніямъ равновѣсія соответствуютъ*  
*плоскости центровъ, въ которыхъ прямая  $С\Pi$  нормальна къ по-*

верхности, чтобъ опредѣлить всѣ положенія равновѣсія тѣла, надо по-  
 — центровъ и опустить на нее нормали изъ центра тяжести тѣла;  
 — образомъ точки поверхности центровъ будутъ служить центрами  
 — жидкости при положеніяхъ равновѣсія.

Вспомнявъ примѣръ неоднороднаго эллипсоида, поверхность  
 — также эллипсоидомъ подобнымъ наружному; изъ центра  $C$  тяжести,  
 — большой оси, можно опустить еще четыре нормали на поверхность  
 — тѣла, которыя совпадаютъ съ большою осью; эти четыре нормали  
 — двѣ въ двухъ главныхъ діаметральныхъ плоскостяхъ эллипсоида,  
 — черезъ большую ось. Слѣдовательно, и такой эллипсоидъ имѣетъ шесть  
 — равновѣсія въ жидкости, столько же, сколько и однородный.

Слѣдуетъ теперь условія устойчивости положеній равновѣсія твердаго тяже-  
 — дающаго въ тяжелой жидкости, но не вполне погруженнаго.

Положенія равновѣсія устойчивы для такихъ поступательныхъ перемѣщеній,  
 — тѣло опускается или поднимается. Въ самомъ дѣлѣ, при опусканіи тѣла,  
 — вытѣсняемой жидкости увеличивается, сила дѣйствующая снизу вверхъ полу-  
 — обладаніе надъ вѣсомъ тѣла и избытокъ ея надъ послѣдней стремится при-  
 — тѣло; обратно, при подниманіи тѣла, объемъ вытѣсняемой жидкости умень-  
 — съ нимъ и величина силы дѣйствующей снизу вверхъ и надъ ней получаетъ  
 — ланіе вѣсъ тѣла.

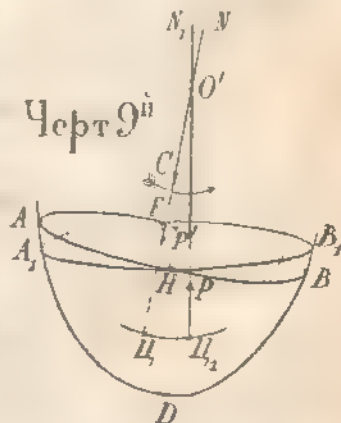
Для поступательныхъ перемѣщеній, при которыхъ тѣло не опускается и не по-  
 — н, всѣ положенія равновѣсія безразличны.

Если твердое тѣло, находившееся въ положеніи  
 — равновѣсія, будетъ отклонено изъ этого положенія.  
 — что линія  $С\Pi_1$ , соединяющая центръ тяжести  
 — центромъ тяжести новаго измѣненнаго объема  
 — тѣ уже вертикальною, то, для сужденія объ устой-  
 — ти положенія равновѣсія, придется разсмотрѣть,  
 — если пара силъ  $СP'$  (вѣсъ тѣла) и  $\Pi_1 P$  (давле-  
 — жидкости) возвратитъ тѣло въ положеніе равновѣ-  
 — или же еще далѣе опрокинуть его.

Положеніе равновѣсія будетъ несомненно  
 — устойчивымъ, если точка  $C$  ниже части поверхно-  
 — центровъ, ближайшей къ  $\Pi$ .

Если точка  $C$  выше точки  $\Pi$ , то положеніе равно-  
 — можетъ быть устойчивымъ, если будутъ соблюдены нѣкоторые условія, какъ мы  
 — ниже.

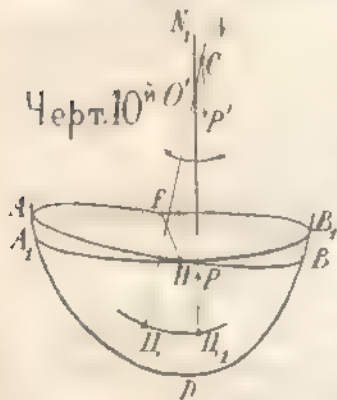
Сначала разсмотримъ такіе весьма малыя отклоненія, при которыхъ нор-  
 —  $\Pi_1 N_1$ , возстановленная къ поверхности центровъ изъ новаго положенія центра  $\Pi_2$



измѣщенной жидкости, пересѣкаетъ нормаль  $ЦN$  восстановленную изъ центра  $Ц$  соответствующаго положенію равновѣсія.

Какъ извѣстно, если восстановить нормаль изъ какой либо точки кривой поверхности, то другая нормаль, восстановленная изъ бесконечно-близкой соедѣнной точки, пересѣчетъ первую нормаль только въ томъ случаѣ, когда соедѣнная точка взята въ плоскости одного изъ двухъ главныхъ нормальныхъ сѣченій поверхности, проведеннаго черезъ первую нормаль; притомъ точки пересѣченій будутъ центрами кривизны главныхъ нормальныхъ сѣченій.

Поэтому отклоненія тѣла изъ положенія равновѣсія, разсматриваемыя нами теперь, предполагаются ничтожно-малыми и произшедшими не въ произвольномъ направленіи, но въ одной изъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей главныхъ нормальныхъ сѣченій поверхности центровъ, проведенныхъ черезъ нормаль  $ЦN$ .



Если, какъ мы предполагаемъ, отклоненіе ничтожно мало, то новая нормаль  $Ц_1N_1$  (черт. 9 и 10) пересѣчетъ нормаль  $ЦN$  въ центрѣ  $O'$  кривизны нормального сѣченія  $ЦЦ$ , проведеннаго черезъ нормаль точки  $Ц$ .

По направленію  $Ц_1O'N_1$  будетъ, въ отклоненіи, положенія тѣла, дѣйствовать на него равнодѣйствующае давленіе, а по направленію  $С'P'$ , параллельному и противоположному первому, дѣйствуетъ весь тѣла.

Если центр  $O'$  кривизны нормального сѣченія выше центра тяжести  $С$  тѣла, какъ на чертежѣ 9-мъ, то вышесказанная пара силъ стремится повернуть тѣло въ сторону означенною оперенною стрѣлкою, т. е. вернуть его въ положеніе равновѣсія.

Если же центр  $O$  ниже центра тяжести  $С$ , какъ на чертежѣ 10-мъ, то пара силъ стремится повернуть тѣло въ сторону, означенную неоперенною стрѣлкою, т. е. опрокинуть тѣло.

То же самое должно сказать и объ отклоненіяхъ тѣла (изъ того же положенія равновѣсія) въ плоскости другаго нормального сѣченія, имѣющаго свой центръ кривизны  $O''$ , вообще говоря не совпадающій съ центромъ кривизны перваго сѣченія.

Изъ этого видно, что положеніе равновѣсія тѣла для отклоненія въ плоскостяхъ главныхъ сѣченій будетъ устойчиво, если центръ тяжести  $С$  лежитъ ниже центровъ кривизны обоихъ главныхъ нормальныхъ сѣченій.

Точки  $O'$  и  $O''$  — центры кривизны главныхъ нормальныхъ сѣченій, называются *метацентрами*.

Разсмотримъ теперь ничтожно-малыя отклоненія, произшедшія не въ плоскостяхъ главныхъ нормальныхъ сѣченій поверхности центровъ въ точкѣ  $Ц$ .

Въ этихъ случаяхъ нормаль  $Ц_1N_1$  не пересѣчетъ нормаль  $ЦN$ , но пройдетъ въ кратчайшемъ отъ нея разстояніи  $r_1$  близъ какойто точки  $i$ , находящейся между центрами  $O'$  и  $O''$  кривизны главныхъ нормальныхъ сѣченій (черт. 11). Пара силъ ( $P'$  и  $ЦP$ ) будетъ имѣть стремленіе повернуть тѣло вокругъ оси перпендикулярной къ плоскости этой пары; эта ось не только не параллельна направленію  $n_1$ , но составляетъ съ нимъ прямой уголъ, если точка  $i$  совпадаетъ съ точкою  $i$ ; вообще же эта ось составляетъ съ направлениемъ  $n_1$  уголъ тѣмъ меньшій, чѣмъ точка  $i$  дальше отъ  $i$ . Мы обратимъ вниманіе только на составляющую пары силъ ( $P'$  и  $ЦP$ ), дѣйствующую въ плоскости перпендикулярной къ  $n_1$ ; эта составляющая стремится повернуть тѣло въ сторону, указанную на чертежѣ



стрелкою, т. е. стремясь вернуть его въ положеніе равновѣсія, если  $C'$  выше  $i$ , то составляющая пары въ плоскости перпендикулярной къ  $i_1$  опрокинута тѣло.

Теперь можемъ заключить, что тѣ положенія равновѣсія, въ которыхъ оба метacentра выше центра тѣла, устойчивы для всякихъ малыхъ отклоненій; тѣ положенія, въ которыхъ оба метacentra ниже центра тяжести тѣла — неустойчивы для всякихъ отклоненій; тѣ положенія, въ которыхъ одинъ метacentra выше, а другой ниже центра тяжести, устойчивы для некоторыхъ малыхъ отклоненій, неустойчивы для прочихъ.

Разсмотримъ теперь какимъ образомъ можно вычислить радиусовъ кривизны  $CO'$  и  $CO''$  для нормальныхъ сѣченій поверхности центровъ; вычислять эти данныя необходимо для того, чтобы было возможно опредѣлять положенія метacentra  $O'$  и  $O''$ .

Проведемъ изъ точки  $i$  прямую  $iR$  параллельно нормали  $N, N_1$  и на проведенную прямую опустимъ перпендикуляръ  $CS$  изъ точки  $C$ ; длину этого перпендикуляра можно выразить такъ:  $Ci \sin \varphi$ , гдѣ  $\varphi$  — уголъ отклоненія  $CiR$ ; по малости же угла  $\varphi$  длину перпендикуляра  $CS$  можно выразить такимъ произведеніемъ:

$$CS = Ci \varphi'' \sin 1''.$$

Съ другой стороны, длина этого перпендикуляра равна плечу силы  $C_1P$  вокругъ проведенной черезъ точку  $C$  перпендикулярно къ плоскости  $CiR$  и стало быть направлено къ кратчайшему разстоянію  $i_1$ . Между прочимъ замѣтимъ, что въ этомъ направленіи параллельно направленію  $FH$  прямой пересѣченія двухъ плоскостей плаванія, такъ какъ эти плоскости перпендикулярны къ соответственнымъ силамъ.

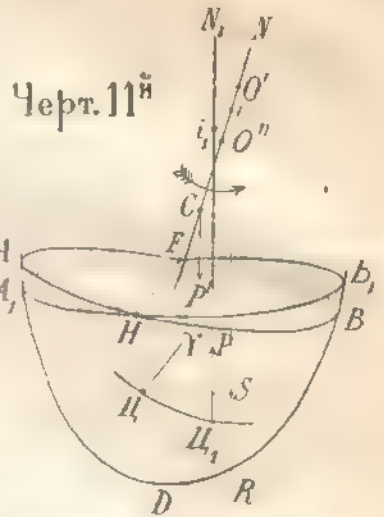
Произведеніе изъ величины силы  $C_1P$  на плечо  $CS$  выражаетъ величину момента  $C_1P$  вокругъ оси  $Y$ , проведенной изъ точки  $C$  параллельно направленію отъ  $H$  къ  $F$ . Какъ намъ уже извѣстно сила  $C_1P$  есть равнодѣйствующая гидростатическихъ давленій же равнодѣйствующая воображаемыхъ объемныхъ силъ, приложенныхъ къ элементамъ погруженнаго въ жидкость объема  $A_1HDB_1FA_1$ , направленныхъ снизу вверхъ параллельно  $C_1N_1$  и равныхъ  $y$  (такъ что на элементъ  $dO$  дѣйствуетъ воображаемая сила  $sgdO$  снизу вверхъ параллельно  $C_1N_1$ ).

Объемъ же  $A_1HDB_1FA_1$  состоитъ изъ объема  $A_1HDBFA_1$ , который мы условимся для краткости обозначать черезъ  $W$ , и изъ объема  $F_1HDB_1$  клина  $F_1HDB_1$ . Если обозначимъ моментъ силы  $C_1P$  вокругъ оси  $Y$  (черт. 11) знакомъ  $L_1$ , а моменты вокругъ осей воображаемыхъ объемныхъ силъ, приложенныхъ къ элементамъ объемовъ  $W$  — знаками  $L(W)$ ,  $L(v_1)$ , то можемъ написать равенство:

$$C_1P \cdot CS = L_1 = L(W) + L(v_1), \dots \dots \dots (42)$$

имѣющее, что моментъ силы  $C_1P$  равенъ суммѣ моментовъ воображаемыхъ объемныхъ силъ, приложенныхъ къ элементамъ двухъ вышесказанныхъ объемовъ.

Когда тѣло было въ положеніи равновѣсія, тогда точка  $C$  была центромъ тяжести параллельныхъ объемныхъ силъ, приложенныхъ къ элементамъ объема  $A_1HDBFA_1$ , состоящаго изъ объема  $W$  и изъ клина  $A_1HFA_1$  (объемъ послѣдняго означимъ черезъ  $v_1$ ). Эти воображаемыя объемныя силы дѣйствовали параллельно направленію поршня  $HN$ , которая тогда была вертикальна.





есть плечо момента элемента объема  $dO$  вокруг оси  $Y$ , также выразится вокруг оси  $Z$ -овъ объемной силой, приложенной къ элементу объема клина  $n$  силой параллельно положительной оси  $Z$ -овъ; поэтому окажется, что:

$$I_1 = \sigma g \operatorname{tg} \varphi \iint x^2 dx dy, \dots \dots \dots (44)$$

интегралъ распространень на всю площадь  $A_1 B_1$ ; этотъ интегралъ равенъ моменту площади  $A_1 B_1$  вокругъ оси  $HF$ .

Какъ уголъ  $\varphi$  весьма малъ, то  $\operatorname{tg} \varphi$  можно замѣнить произведеніемъ  $\varphi'' \sin 1''$ ; такъ, по мѣрѣ уменьшенія угла  $\varphi$ , площадь  $A_1 B_1$  приближается къ площади  $AB$ , вышеупомянутый интегралъ приближается въ предѣлѣ къ моменту инерціи площади  $AB$  вокругъ оси  $HF$ . Самая линия  $HF$  въ предѣлѣ проходитъ черезъ тяжесть площади  $AB$ , какъ видно изъ нижеслѣдующаго.

Величина объема клина  $v_1$  равна:

$$\operatorname{tg} \varphi \iint x dx dy,$$

интегралъ распространень только по правой части площади  $A_1 B_1$ ; величина же объема равна интегралу, распространенному по лѣвой части площади  $A_1 B_1$ ,

$$- \operatorname{tg} \varphi \iint x dx dy,$$

интегралъ взять съ отрицательнымъ знакомъ потому, что для всѣхъ точекъ этой площади  $x$  имѣетъ отрицательныя значенія; равенство объемовъ  $v_1$  и  $v$  выразится такъ:

$$\operatorname{tg} \varphi \iint x dx dy = - \operatorname{tg} \varphi \iint x dx dy,$$

когда, по раздѣленіи обѣихъ частей на  $\operatorname{tg} \varphi$ , получимъ:

$$\iint x dx dy = 0.$$

Интегралъ распространень на всю площадь  $A_1 B_1$  или, что въ предѣлѣ одно и то же, на площадь  $AB$ ; это и означаетъ, что на оси  $HF$  находится центръ тяжести площади  $AB$ .

Возвратимся къ равенству (14). Замѣнимъ въ немъ моментъ  $I_1$  произведеніемъ веса  $\Pi_1 P$  на плечо ея вокругъ точки  $\Pi$  (величина же этой силы равна вѣсу тѣла,  $\Pi_1 Mg$ ); получимъ:

$$\Pi_1 Mg \varphi'' \sin 1'' = \sigma g \varphi'' \sin 1'' \iint x^2 dx dy;$$

отбросивъ общіе множители въ обѣихъ частяхъ этого равенства и перехода къ предѣлу, предполагая уголъ  $\varphi$  уменьшающимся до нуля, найдемъ слѣдующее выраженіе для  $\Pi_1$ :

$$\Pi_1 = \frac{J_k}{V}, \dots \dots \dots (45)$$



гдѣ  $V$  есть объемъ измѣщенной жидкости, а  $J_k$  моментъ инерціи площади  $AB$  вокругъ оси, проведенной въ этой плоскости черезъ центръ ея тяжести  $K$ , перпендикулярно плоскости  $ЦК$ .

Формула (45) должна быть справедлива для отклоненій  $\varphi$  во всякихъ направленіяхъ, а слѣдовательно и для отклоненій, совершающихся въ плоскостяхъ главныхъ нормальныхъ сѣченій поверхности центровъ; въ нихъ  $ЦК$  обращается въ  $ЦО$  и  $ЦО'$ ; такъ какъ это суть наибольшая и наименьшая величины разстоянія  $\overline{IK}$ , то соответственные моменты инерціи должны быть наибольшими и наименьшими моментами инерціи площади  $AB$ .

И такъ мы теперь слѣдующее правило для опредѣленія положеній плоскостей главныхъ нормальныхъ сѣченій поверхности центровъ и для опредѣленія положенія метacentровъ:

*Надо найти центръ тяжести  $K$  площади плаванія  $AB$  въ положеніи равновѣсія и опредѣлить направленія главныхъ центральныхъ осей инерціи этой площади: взаимно-перпендикулярныя плоскости, проведенныя черезъ нормаль  $ЦК$  и черезъ найденныя оси инерціи, будутъ плоскостями главныхъ нормальныхъ сѣченій поверхности центровъ.*

Пусть  $\mathfrak{A}_k$  есть наибольшій главный центральный моментъ инерціи и  $\mathfrak{B}_k$  наименьшій моментъ инерціи площади плаванія  $AB$ : разстоянія обоихъ метacentровъ отъ точки  $Ц$  будутъ равны:

$$ЦО' = \frac{\mathfrak{A}_k}{V}, \quad ЦО'' = \frac{\mathfrak{B}_k}{V}; \dots \dots \dots (46)$$

причемъ верхній метacentръ  $O'$  соответствуетъ отклоненію въ плоскости перпендикулярной къ той главной оси инерціи, вокругъ которой моментъ инерціи наиболѣйшій.

Для того, чтобы положеніе равновѣсія было вполне устойчивымъ, необходимо, чтобы было

$$\mathfrak{B}_k - Vl > 0,$$

тогда уже и поправка  $\mathfrak{A}_k$  будетъ болѣе  $Vl$ , гдѣ  $l$  означаетъ разстояніе  $ЦС$ .

Величины моментовъ силъ, стремящихся возстановить тѣло, отклоненное отъ своего положенія равновѣсія на уголъ  $\varphi''$  (въ секундахъ), равны:

$$\sigma g (\mathfrak{A}_k - Vl) \varphi'' \sin 1'', \quad \sigma g (\mathfrak{B}_k - Vl) \varphi'' \sin 1'',$$

для отклоненій въ каждой изъ главныхъ плоскостей.

Для примѣра возьмемъ слѣдующій случай.

Твердое тѣло есть однородная прямоугольная призма длины  $2a$  съ квадратнымъ основаніемъ (сторона квадрата  $2b$ ); тѣло плаваетъ въ жидкости, удѣльный вѣсъ которой вдвое болѣе удѣльнаго вѣса тѣла. Найти устойчивыя положенія равновѣсія изъ числа тѣхъ, при которыхъ длина призмы горизонтальна.

Очевидно, что призма имѣетъ четыре такихъ положенія равновѣсія, при которыхъ по двѣ боковыя грани горизонтальны и четыре такихъ, при которыхъ онѣ наклонны къ горизонту подъ угломъ въ  $45^\circ$ .

При каждомъ изъ первыхъ положеній измѣщенный объемъ есть прямоугольная призма, объемъ которой равенъ половинѣ объема тѣла, т. е.  $4ab^2$ , разстояніе  $l$  равно  $b$  дѣленному на два; площадь плаванія есть прямоугольникъ длины  $2a$  и ширины  $2b$ ; главные моменты инерціи этой площади:  $\mathfrak{A}_k = \frac{4ba^3}{3}$ ,  $\mathfrak{B}_k = \frac{4ab^3}{3}$ ;

$$\mathfrak{B}_k - Vl = -\frac{2}{3} ab^3, \quad \mathfrak{A}_k - Vl = \frac{2ba}{3} (2a^2 - 3b^2);$$

значитъ эти положенія навѣрно неустойчивы для вращеній вокругъ оси параллельно двѣмъ призмы.

и других четырех положеній равновѣсія, когда одно ребро занимает самое низшее—самое высшее мѣсто, объемъ  $V$  имѣетъ ту же самую величину, но имѣетъ формулу призмы;  $l = b \sqrt{\frac{a^2}{3}}$ ; площадь плаванія есть прямоугольникъ длины  $2a$  и ширины  $2b$ .

$$\mathcal{M}_k = \frac{4ba^3\sqrt{2}}{3}, \quad \mathcal{B}_k = \frac{8ab^3\sqrt{2}}{3};$$

$$\mathcal{B}_k - IV = \frac{4}{3} ab^3 \sqrt{2}, \quad \mathcal{M}_k - IV = \frac{4}{3} ab \sqrt{2} (a^3 - b^3);$$

быть эти положенія устойчивы.

### III.

#### Уравненія гидродинамики.

#### § 17. Аналитическое выраженіе движенія сплошнаго деформирующаго тѣла. Скорости и ускоренія точекъ его.

Движеніе такого тѣла будетъ намъ извѣстно, если имѣемъ возможность перейти отъ начальныхъ координатъ  $a, b, c$  всякой точки тѣла къ координатамъ ея  $x, y, z$  въ любой моментъ времени; для этого необходимо, чтобы  $x, y, z$  были выражены функциями начальныхъ координатъ  $a, b, c$  и времени  $t$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(a, b, c, t) \\ y &= f_2(a, b, c, t) \\ z &= f_3(a, b, c, t) \end{aligned} \right\}, \dots\dots\dots (47)$$

предполагается, что время считается отъ начального момента.

Если тѣло не претерпѣваетъ никакого разрыва при движеніи, то функціи  $f_1, f_2, f_3$  должны быть сплошными функциями какъ относительно  $t$ , такъ и относительно  $a, b, c$ .

Для поясненія на примѣрѣ, возьмемъ слѣдующій случай.

Въ начальный моментъ сплошное тѣло имѣло видъ прямоугольнаго параллелепипеда, центръ котораго совпадаетъ съ началомъ координатъ, а ребра, имѣющія длины  $2a, 2b, 2c$ , параллельны осямъ координатъ  $X, Y, Z$ . Точки этого тѣла, имѣвшія при  $t = 0$  координаты  $a, b, c$ , въ моментъ  $t$  имѣютъ координаты:

$$x = a, \quad y = b + B\left(1 - \frac{a^2}{a^2}\right)t, \quad z = c. \dots\dots\dots (47, A)$$

Какое движеніе совершаютъ точки тѣла, предполагая, что формулы (47, A) справедливы для всѣхъ точекъ тѣла и для всякаго момента  $t$ ?

Такъ какъ координаты  $a$  и  $c$  остаются неизмѣнными, а измѣняются только  $y$ , то всѣ точки тѣла движутся по прямымъ линіямъ, параллельнымъ оси  $Y$ -овъ, каждая

движется равномерно, потому что  $y$  возрастает пропорционально времени; наибольшею скоростью  $B$  обладают точки тѣла, находящейся въ плоскости  $YZ$  (для нихъ  $a = 0$ ), точки же, находившіяся на граняхъ  $a = a$  и  $a = -a$  параллелепипеда, остаются неподвижными, потому что для нихъ  $y = b$ .

Всѣ точки тѣла, находившіяся въ моментъ  $t = 0$  на грани  $b = -b$ , въ моментъ  $t_1$  будутъ на поверхности, выражаемой уравненіемъ:

$$y = Bt_1 - b - \frac{Bt_1}{a^2} x^2;$$

всѣ точки, находившіяся въ моментъ  $t = 0$  на плоскости  $b = \text{постоянна.}$ , параллельной въ вышесказанной грани, будутъ въ моментъ  $t_1$  находиться на поверхности:

$$y = Bt_1 + b - \frac{Bt_1}{a^2} x^2;$$

всѣ эти поверхности суть параболическіе цилиндры, производяція которыхъ параллельны оси  $Z$ -овъ.

Проекція на оси координатъ скоростей точекъ сплошнаго тѣла, не претерпѣващаго разрыва при движеніи, могутъ быть выражены, или сплошными функціями времени  $t$  и начальныхъ координатъ  $a, b, c$  или сплошными функціями времени  $t$  и координатъ  $x, y, z$ .

Чтобы получить проекція скорости въ которой либо точки тѣла для какаго либо моментъ времени, надо подставить въ функціи (47) начальные координаты этой точки вмѣсто  $a, b, c$ , взять производныя отъ нихъ по времени и подставить вмѣсто  $t$  значеніе, соотвѣтствующее разсматриваемому моменту; подобно этому придется поступить для полученія проекцій скорости всякой точки тѣла въ какой угодно моментъ времени. Вообще же можно сказать, что проекція скоростей точекъ тѣла на оси координатъ выражаются функціями отъ  $a, b, c, t$ , равными частнымъ производнымъ по  $t$  отъ функцій  $f_1, f_2, f_3$ , выражающихъ  $x, y, z$ ; т. е.:

$$\left. \begin{aligned} v \cos(v, X) &= \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f_1(a, b, c, t)}{\partial t} \\ v \cos(v, Y) &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f_2(a, b, c, t)}{\partial t} \\ v \cos(v, Z) &= \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f_3(a, b, c, t)}{\partial t} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (48)$$

Если изъ этихъ выраженій исключить  $a, b, c$  при помощи равенствъ (47), то проекція скоростей точекъ деформируемаго тѣла выразятся въ некоторыми функціями  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  отъ  $t$  и отъ координатъ  $x, y, z$ ; проекція скорости, выраженныя такимъ образомъ, мы будемъ обозначать знаками  $u, v, w$ , такъ что:

$$\left. \begin{aligned} u &= v \cos(v, X) = \varphi_1(x, y, z, t) \\ v &= v \cos(v, Y) = \varphi_2(x, y, z, t) \\ w &= v \cos(v, Z) = \varphi_3(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (49)$$



Кратко, чтобы изъ выражений  $u, v, w$  получить выражения  $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ , должно въ функцияхъ  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  замѣнить  $x, y, z$  функциями  $f_1, f_2, f_3$  (47), вслѣдствіе чего  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  обратятся въ частныя производныя отъ  $f_1, f_2, f_3$  по  $t$ , такъ что наприимѣръ:

$$\varphi_1(f_1(a, b, c, t), f_2(a, b, c, t), f_3(a, b, c, t), t) = \frac{\partial f_1(a, b, c, t)}{\partial t} \dots (50)$$

Для поясненія возьмемъ такой случай движенія сплошнаго деформирующагося тѣла:

$$x = ae^{at}, y = be^{bt}, z = ce^{ct}.$$

Здѣсь:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = aae^{at}, \frac{\partial y}{\partial t} = bbe^{bt}, \frac{\partial z}{\partial t} = cce^{ct}.$$

$$u = ax, v = by, w = cz.$$

Проекціи на оси координатъ ускореній  $\ddot{v}$  точекъ деформирующагося тѣла тоже могутъ быть выражены или функциями отъ  $a, b, c$  и  $t$ , или же функциями отъ  $x, y, z, t$ .

Первыя выраженія получаются, взявъ частныя производныя второго порядка по  $t$  отъ  $x, y, z$ , т. е. отъ функций (47); именно:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v} \cos(\ddot{v}, X) &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_1(a, b, c, t)}{\partial t^2}, \\ \ddot{v} \cos(\ddot{v}, Y) &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_2(a, b, c, t)}{\partial t^2}, \\ \ddot{v} \cos(\ddot{v}, Z) &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_3(a, b, c, t)}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (51)$$

Чтобы получить выраженія тѣхъ же проекцій въ функцияхъ отъ  $x, y, z, t$ , будемъ рассуждать слѣдующимъ образомъ.

Вторая производная отъ  $f_1$  по  $t$  равняется первой производной по  $t$  отъ  $\frac{\partial x}{\partial t}$ , т. е.:

$$\ddot{v} \cos(\ddot{v}, X) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f_1(a, b, c, t)}{\partial t} \right),$$

или же, на основаніи равенства (50):

$$\ddot{v} \cos(\ddot{v}, X) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \varphi_1(f_1(a, b, c, t), f_2(a, b, c, t), f_3(a, b, c, t), t) \right],$$

т. е. есть, взявъ дѣйствительно производную по  $t$ :

$$\ddot{v} \cos(\ddot{v}, X) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_3} \frac{\partial f_3}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t},$$

или, такъ какъ  $f_1, f_2, f_3$  суть  $x, y, z$ , то это выраженіе можно написать такъ:

$$\ddot{v} \cos(\ddot{v}, X) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}.$$

Если здѣсь замѣнить производныя отъ  $x, y, z$  по  $t$  — выраженіями  $u, v, w$ , а въ  $\varphi_1$  и ея производныхъ не замѣнять  $x, y, z$  функціями  $f_1, f_2, f_3$ ; то вторая часть этого выраженія и будетъ функціею отъ  $x, y, z, t$ .

Мы представимъ эти выраженія въ такомъ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} \cos (\dot{v}, X) &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \\ \dot{v} \cos (\dot{v}, Y) &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \\ \dot{v} \cos (\dot{v}, Z) &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (52)$$

или, сокращенно, будемъ эти же самыя выраженія писать подъ видомъ *полныхъ производныхъ отъ  $u, v, w$  по  $t$* :

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} \cos (\dot{v}, X) &= \frac{du}{dt}, \\ \dot{v} \cos (\dot{v}, Y) &= \frac{dv}{dt}, \\ \dot{v} \cos (\dot{v}, Z) &= \frac{dw}{dt}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (52, bis)$$

## § 18. Дифференціальное уравненіе неразрывности деформирующагося вещества.

Въ предыдущемъ параграфѣ было показано, что проэкціи скоростей точекъ деформирующагося тѣла можно выразить функціями отъ времени  $t$  и отъ координатъ  $x, y, z$ ; если дадимъ  $x, y, z$  какія либо постоянныя значенія, свойственныя нѣкоторой точкѣ пространства занимаемаго тѣломъ, то законъ измѣненія величинъ  $u, v, w$  съ теченіемъ  $t$  дастъ представленіе объ измѣненіи величины и направленія скорости съ теченіемъ времени въ этой точкѣ пространства; съ другой же стороны, зависимость величинъ  $u, v, w$  отъ  $x, y, z$  дастъ понятіе о распредѣленіи одновременныхъ скоростей точекъ тѣла въ занимаемомъ имъ пространствѣ.

Плотности точекъ неоднороднаго деформирующагося тѣла могутъ быть выражены, подобно проэкціямъ скорости, двоякимъ образомъ: или функціею отъ начальныхъ координатъ и времени, или же функціею отъ координатъ  $x, y, z$  и времени. Въ настоящемъ параграфѣ будемъ имѣть въ виду послѣдній способъ выраженія.

Видѣлимъ мысленно въ той части пространства, которая занята деформирующимся тѣломъ, какой либо объемъ, ограниченный замкнутою поверхностью; объемъ этотъ долженъ быть выбранъ такъ, чтобы и въ моментъ  $t$  и въ моментъ  $t + dt$  онъ былъ весь заполненъ веществомъ тѣла.

Разобъемъ этотъ объемъ на бесконечно-малые элементы  $dO$ .

Масса вещества, заключающагося въ моментъ  $t$  въ этомъ объемѣ, выразится интеграломъ:

$$\iiint \sigma dO.$$

отнесенным на весь этот объемъ:  $\sigma$  предполагается функциею отъ  $x, y, z, t$ :

$$\sigma = f(x, y, z, t)$$

Частъ объема  $dO$  выразится чрезъ  $dx dy dz$ .

Въ теченіи безконечно-малаго промежутка времени  $dt$  плотность въ каждой точкѣ  $\sigma$  получитъ приращеніе  $\frac{\partial \sigma}{\partial t} dt$  и, слѣдовательно, масса вещества, заключающагося въ томъ же объемѣ въ моментъ  $(t + dt)$  будетъ равна:

$$\iiint \left( \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt \right) dO;$$

т. е. бытъ, за время отъ  $t$  до  $t + dt$  въ рассматриваемомъ нами объемѣ *прибываетъ* следующая масса вещества:

$$\iiint \frac{\partial \sigma}{\partial t} dO dt \dots \dots \dots (53)$$

Эта прибыль массы могла произойти только оттого, что въ теченіи того же времени въ рассматриваемый объемъ вошло больше вещества извнѣ его, чѣмъ изъ него вышло.

Выходъ и входъ вещества происходитъ не иначе, какъ черезъ элементы поверхности объема.

Пусть  $dS_1$  есть одинъ изъ тѣхъ элементовъ поверхности, въ которыхъ нормаль, расположенная внаружy объема, составляетъ со скоростью  $v$ , въ этомъ элементѣ  $dS_1$  острый; количество вещества, прошедшее черезъ этотъ элементъ въ теченіи безконечно-малаго промежутка времени  $dt$ , можно выразить произведеніемъ изъ плотности  $\sigma$  въ этомъ элементѣ на объемъ косаго цилиндра, имѣющаго основаніемъ этотъ элементъ  $dS_1$ , а производящимъ — безконечно-малыя длины  $v dt$ , наклоненныя къ нормали  $N$  подъ угломъ  $(v, N)$ ; объемъ этого цилиндра равенъ:

$$dS_1 v \cos (v, N) dt$$

И потому черезъ элементъ  $dS_1$  *выходитъ* изъ рассматриваемаго нами объема слѣдующая масса вещества:

$$\sigma, v \cos (v, N) dS_1 dt \dots \dots \dots (A)$$

Пусть  $dS_2$  есть одинъ изъ тѣхъ элементовъ, гдѣ уголъ  $(v, N)$  — тупой; черезъ такой элементъ *входитъ* въ рассматриваемый объемъ слѣдующая масса вещества:

$$-\sigma, v \cos (v, N) dS_2 dt; \dots \dots \dots (B)$$

Здѣсь поставленъ знакъ минусъ потому, что косинусъ тупаго угла есть величина отрицательная, а намъ нужно было составить выраженіе положительнаго количества, а именно массы входящаго вещества.

Взявъ интегралъ отъ выраженій (B) по всемъ элементамъ, такимъ какъ  $dS_2$ , получимъ массу вещества входящаго въ объемъ, а взявъ интегралъ отъ выраженій (A)

по всѣмъ элементамъ, такимъ какъ  $dS$ , получимъ массу вещества выходящаго изъ объема; вычтя второй интегралъ изъ перваго, получимъ интегралъ:

$$-\iint \sigma_s v_s \cos (v_s N) dS dt, \dots \dots \dots (54)$$

распространенный по всей поверхности объема и представляющій другое выраженіе прироста массы за время  $dt$ . Приравняемъ другъ другу оба полученныя выраженія:

$$dt \iiint \frac{\partial \sigma}{\partial t} dO = -dt \iint \sigma_s v_s \cos (v_s N) dS \dots \dots \dots (55)$$

Замѣнимъ здѣсь проекцію скорости на нормаль слѣдующимъ тричленомъ:

$$v_s \cos (v_s N) = u_s \cos (N, X) + v_s \cos (N, Y) + w_s \cos (N, Z) \dots \dots (56)$$

и получившіеся черезъ это во второй части интегралы:

$$\iint \sigma_s u_s \cos (N, X) dS, \iint \sigma_s v_s \cos (N, Y) dS, \iint \sigma_s w_s \cos (N, Z) dS$$

преобразуемъ по формуламъ 16-мъ § 10-го предыдущей главы въ интегралы, распространенные по объему; тогда получимъ, раздѣливъ обѣ части на  $dt$  и перенеся всѣ члены въ первую часть:

$$\iiint \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial (\sigma u)}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma v)}{\partial y} + \frac{\partial (\sigma w)}{\partial z} \right) dO = 0 \dots \dots \dots (57)$$

Мы составляли это равенство, предполагая промежутокъ времени  $dt$  безконечно-малымъ и весь объемъ занятый веществомъ въ теченіи всего промежутка. Если то деформирующееся тѣло, движеніе котораго мы разсматриваемъ, не претерпѣваетъ разрыва сплошности ни въ которой изъ своихъ частей, то мы можемъ примѣнить равенство (56) къ которой угодно части такого тѣла, какъ бы мала эта часть ни была. а изъ этого тогда будетъ слѣдовать, что во всякой точкѣ тѣла, деформирующагося неразрывнымъ образомъ, должно имѣть мѣсто слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma u}{\partial x} + \frac{\partial \sigma v}{\partial y} + \frac{\partial \sigma w}{\partial z} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sigma = 0, \dots \dots \dots (58)$$

называемое уравненіемъ неразрывности массы.

Введя выраженіе полной производной отъ плотности по времени, можно уравненіе (58) представить такъ:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \dots \dots \dots (59)$$



Если деформирующееся тѣло однородно и плотность его неизмѣнна, то уравненіе непрерывности обращается въ уравненіе, выражающее неизмѣняемость плотности вещества, а именно въ слѣдующее:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (60)$$

### § 19. Общія дифференціальныя уравненія движенія жидкостей, не поддающихся тренію.

Послѣ всего сказаннаго въ двухъ предыдущихъ параграфахъ, примѣнимъ дифференціальныя уравненія (17) параграфа 11-го къ жидкостямъ, такъ называемой, *совершенно жидкой или идеальной*, которая и при движеніи не оказываетъ и не выдерживаетъ никакихъ тангенціальныхъ напряженій, ни натяженій; въ § 12-мъ было упомянуто, что такому идеалу не удовлетворяетъ ни одна дѣйствительная жидкость, такъ какъ въ нихъ при движеніи развивается треніе внутреннее, т. е. между частицами самой жидкости, и треніе внешнее, т. е. между жидкостью и тѣми твердыми тѣлами, по поверхности которыхъ она течетъ.

Дифференціальныя уравненія движенія жидкости представляютъ въ двойномъ отношеніи, смотря по тому, предполагаются ли скорости точекъ жидкости выраженными въ функцияхъ отъ  $t, a, b, c$ , или же въ функцияхъ отъ  $t, x, y, z$ . Мы теперь выберемъ первое предположеніе и, сообразуясь съ нимъ, выразимъ проекціи ускореній точекъ жидкости на оси координатъ по формуламъ (52) параграфа 17-го.

Уравненія (17) тогда получаютъ слѣдующій видъ:

$$\left. \begin{aligned} \sigma \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) &= X\sigma - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \sigma \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \right) &= Y\sigma - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \sigma \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right) &= Z\sigma - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (61)$$

Значеніе  $p$  имѣетъ то же самое значеніе, что и въ § 12-мъ.

Если жидкость несжимаема и плотность ея однородна и неизмѣнна, то въ трехъ дифференціальныхъ уравненіяхъ (61) будетъ заключаться четыре функции:  $u, v, w, p$  въ четырехъ переменныхъ:  $t, x, y, z$ ; присоединивъ къ этимъ уравненіямъ уравненіе несжимаемости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (60)$$

будемъ имѣть четыре дифференціальныя совокупныя уравненія съ частными производными перваго порядка. Для рѣшенія какого либо вопроса о движеніи несжимаемой жидкости подъ вліяніемъ данныхъ объемныхъ силъ надлежало бы прежде всего найти общий интегралъ четырехъ вышесказанныхъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, то есть пришлось бы отыскать такіа самыя общія выраженія для  $u, v, w, p$ , которые удовлетворили бы сказанныхъ дифференціальнымъ уравненіямъ при всякихъ значеніяхъ  $t, x, y, z$  во время всего движенія и въ томъ пространствѣ, которое занято движущеюся жидкостью.

Этимъ, однако, процессъ рѣшенія даннаго вопроса еще не закончится, такъ какъ въ найденныхъ общихъ выраженіяхъ для  $p, u, v, w$  войдутъ произвольныя функціи, видъ которыхъ опредѣлится тѣмъ требованіемъ, чтобы найденныя выраженія для  $p, u, v, w$  удовлетворяли нѣкоторымъ условіямъ на границахъ жидкости и кромѣ того на чальнымъ обстоятельствамъ движенія; мы составимъ теперь выраженія этихъ условій на границахъ.

Движущаяся жидкость можетъ быть ограничена со всѣхъ сторонъ, или же можетъ простирается въ безконечность по нѣкоторымъ направленіямъ, или наконецъ можетъ быть со всѣхъ сторонъ неограничена, простираясь въ безконечность по всѣмъ направленіямъ.

Тамъ, гдѣ жидкость ограничена и гдѣ она отдѣляется отъ прочаго пространства, задается, либо видъ самой поверхности жидкости, либо величина вѣшняго давленія на поверхности.

Гдѣ части поверхности жидкости, видъ которыхъ задается заранѣе, для всякаго момента движенія, называются *стѣнками*; онѣ образуются поверхностями тѣлъ, имѣющихъ данное движеніе или занимающихъ данное положеніе. На поверхностяхъ стѣнокъ давленіе заранѣе не задается, но величина его во всякой точкѣ поверхности стѣнки и для всякаго момента движенія становится извѣстною по полученіи полнаго рѣшенія даннаго вопроса о движеніи жидкости.

Гдѣ части поверхности жидкости, на которыхъ задается величина вѣшняго давленія, называются *свободною поверхностью жидкости*; видъ свободныхъ частей поверхности жидкости становится извѣстнымъ послѣ полученія полнаго рѣшенія вопроса.

Жидкость не должна отдѣляться отъ стѣнки, то есть у поверхности стѣнки не должно образоваться пустотъ, незанятыхъ жидкостью; для этого необходимо, чтобы точки жидкости, бывшія на поверхности стѣнки въ моментъ  $t$ , не сходили съ этой поверхности и въ теченіи послѣдующаго затѣмъ промежутка времени отъ  $t$  до  $t + dt$ , или по крайней мѣрѣ сходили съ нея не иначе, какъ по касательной; это условіе требуетъ, чтобы скорости  $u, v, w$  точекъ жидкости, находящихся въ моментъ  $t$  на поверхности стѣнки:

$$f(x, y, z, t) = 0 \dots \dots \dots (62)$$

удовлетворяли равенству:

$$\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \dots \dots \dots (63)$$

Если стѣнка неподвижна, то уравненіе ея не включаетъ времени явнымъ образомъ:

$$f(x, y, z) = 0 \dots \dots \dots (62, a)$$

и скорости точекъ жидкости, находящихся по такой стѣнкѣ, должны удовлетворять равенству:

$$\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w = 0 \dots \dots \dots (63, a)$$

второе можно написать и въ такомъ видѣ:

$$v \cos(N, v) = 0 \dots \dots \dots (63, a)$$

Таковы условія, которымъ должны удовлетворять скорости точекъ жидкости на поверхности.

На свободной поверхности скорости точекъ жидкости должны удовлетворять разнѣмъ подобнаго же рода, какъ сейчасъ увидимъ; разница здѣсь будетъ только въ томъ, что уравненіе свободной поверхности не задано, между тѣмъ какъ уравненіе дано.

Пусть:

$$F(x, y, z, t) = 0 \dots\dots\dots (64)$$

неизвѣстное намъ до окончательнаго рѣшенія вопроса) уравненіе свободной поверхности, на всѣ точки которой дѣйствуетъ внѣшнее давленіе данной величины.

Такъ какъ предполагается, что движущаяся жидкость нигдѣ не получаетъ разрыва, то всѣ тѣ точки жидкости, которыя были на свободной поверхности въ моментъ  $t$ , будутъ сойти съ нея только непрерывнымъ образомъ, по касательной къ поверхности; поэтому скорости  $u_s, v_s, w_s$  точекъ поверхности должны удовлетворять слѣдующему равенству:

$$\frac{\partial F}{\partial x} u_s + \frac{\partial F}{\partial y} v_s + \frac{\partial F}{\partial z} w_s + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots (65)$$

Тамъ, гдѣ жидкость простирается въ безконечность, должны быть даны скорости конечно-удаленныхъ точекъ.

Когда жидкость упруга, тогда дифференціальныя уравненія (61) заключаютъ не только, но пять функцій:  $u, v, w, p, \sigma$  отъ четырехъ переменныхъ:  $t, x, y, z$ . Для выведенія этихъ функцій придется присоединить къ уравненіямъ (61) уравненіе невязкости (55) и зависимость (23) § 12-го между плотностью  $\sigma$  и давленіемъ  $p$ . Такимъ образомъ должны удовлетворять скорости точекъ на поверхности жидкости, темъ же, какъ и для жидкости несжимаемой.

До настоящаго времени не удалось еще рѣшить или проинтегрировать дифференціальныя уравненія (60) и (61) или (61), (55), (23) въ самомъ общемъ ихъ видѣ; рѣшено получено до сихъ поръ только для ограниченаго числа частныхъ случаевъ и только самыхъ простѣйшихъ.

Приведенная здѣсь форма дифференціальныхъ уравненій (61) гидродинамики дава намъ; есть еще другая форма такихъ уравненій, данная Лагранжемъ, приравновѣшенная къ опредѣленію  $x, y, z, \sigma$  и  $p$  въ функціяхъ отъ  $t$  и отъ начальныхъ координатъ  $a, b, c$ .

## § 20. Движенія несжимаемой жидкости, при которыхъ скорости имѣютъ потенціалъ.

Въ настоящемъ параграфѣ мы будемъ предполагать, что жидкость несжимаема и что внѣшнія объемныя силы имѣютъ потенціалъ, т. е., что:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

гдѣ  $U$  есть функція отъ  $x, y, z$ .

Въ настоящемъ параграфѣ мы нѣсколько остановимся на такихъ случаяхъ движенія несжимаемой жидкости, при которыхъ скорости  $u, v, w$  для всей движущейся

жидкости суть частныя производныя по  $x, y, z$  отъ нѣкоторой функціи  $\phi$  отъ этихъ переменныхъ, которая можетъ заключать, кромѣ нихъ, еще и время  $t$ .

И такъ, пусть во всей жидкости и во все время движенія:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \dots \dots \dots (65)$$

причемъ функція  $\phi$  отъ  $x, y, z$  и  $t$  не измѣняетъ своего вида во все время движенія.

Такая функція  $\phi$  называется *потенціаломъ скоростей* или *потенциальною функциею скоростей*.

Такъ какъ при движеніи несжимаемой жидкости должно быть удовлетворено уравненіе несжимаемости (60), то не всякая функція отъ  $x, y, z$  и  $t$  можетъ быть потенциальною функциею скоростей, но только такая, которая удовлетворяетъ дифференціальному уравненію съ частными производными 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \dots \dots \dots (66)$$

въ которое обращается уравненіе (60) при подстановленіи въ него вмѣсто  $u, v, w$  — частныхъ производныхъ (65).

Кромѣ того эта функція на стѣнкахъ должна удовлетворять уравненіямъ вида:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_s + \frac{\partial \phi}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s + \frac{\partial \phi}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_s = 0 \dots \dots \dots (67)$$

и наконецъ, она должна удовлетворить начальнымъ обстоятельствамъ движенія.

Дифференціальныя уравненія (61), по подстановленіи въ нихъ вмѣсто  $u, v, w$  частныхъ производныхъ (65), получаютъ нижеслѣдующій видъ; первое:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial x},$$

или, что то же самое:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) \right) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{p}{\sigma} = 0,$$

или же:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \dots \dots \dots (68, a)$$

гдѣ

$$\psi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) - U + \frac{p}{\sigma} = 0;$$

второе же и третье получаютъ видъ:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (68, b), \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (68, c)$$



Эти уравненія (68) выражаютъ, что  $\psi$  не зависитъ ни отъ  $x$ , ни отъ  $y$ , ни отъ  $z$  и стало быть, можетъ быть функциею только одного  $t$ ; слѣдовательно:

$$\frac{p}{\sigma} = U + \psi(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right),$$

или:

$$p = \sigma \left( U - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{v^2}{2} \right), \dots \dots \dots (69)$$

гдѣ

$$v^2 = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \dots \dots \dots (70)$$

$$\Phi = \varphi - \psi(t) \dots \dots \dots (71)$$

Функцию  $\Phi$  можно разсматривать тоже какъ потенциальную функцию тѣхъ же скоростей, такъ какъ выраженія (65) и дифференціальныя уравненія (66) и (67) не только не измѣняются отъ присоединенія къ  $\varphi$  какой угодно функции отъ  $t$ .

Если  $P$  есть величина давленія на свободной поверхности, то уравненіе этой поверхности будетъ:

$$P = \sigma \left( U - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right) \right).$$

Равенство (69) выражаетъ довольно простую зависимость между давленіемъ, потенциаломъ объемныхъ силъ и квадратомъ скорости въ точкахъ несжимаемой жидкости, движущейся такимъ образомъ, что скорости имѣютъ потенциалъ; въ тѣхъ точкахъ жидкости, гдѣ  $\left( U - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$  имѣетъ одинаковыя величины, сумма  $\left( p + \frac{\sigma}{2} v^2 \right)$  будетъ тоже имѣть одинаковыя величины и въ той изъ этихъ точекъ, въ которой скорость болѣе чѣмъ въ прочихъ, давленіе будетъ менѣе.

По отношенію къ распредѣленію одновременныхъ скоростей точекъ движущейся жидкости потенциальная функция скоростей имѣетъ ту же самую роль, какую имѣетъ потенциальная функция какой либо силы по отношенію къ распредѣленію величинъ и направленій силы въ пространствѣ. Одновременныя скорости всѣхъ точекъ жидкости направлены по нормаламъ къ поверхностямъ уровня потенциальной функции  $\Phi$  и равны значеніямъ дифференціального параметра

$$\sqrt{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2}$$

этой функции въ соотвѣтственной точкѣ.

Если  $t$  не входитъ вовсе въ функцию  $\varphi$ , то поверхности уровня не измѣняютъ ни своего вида, ни положенія въ пространствѣ, а потому тогда направленія и величины скоростей въ каждой точкѣ пространства не измѣняются.

## § 21. Установившееся движеніе. Теорема Д. Бернулли.

Если во всѣхъ точкахъ пространства, занятого какою либо жидкостью, величины и направленія скоростей, а также величины давленій и плотностей остаются неизмѣнными во все время движенія, т. е. если слѣдующія частныя производныя:

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

повсюду равны нулю, то движеніе жидкости называется *установившимся*; при таком движеніи  $u, v, w, p, \tau$  суть функціи отъ  $x, y, z$ , не заключающія явнымъ образомъ времени  $t$ .

Очевидно, что при такомъ движеніи всѣ тѣ точки жидкости, которыя послѣдовательно проходятъ черезъ одну и ту же точку пространства, движутся другъ за другомъ по одной и той же траекторіи; каждую такую траекторію мы будемъ называть *линіею тока*.

Обратимъ вниманіе на которую угодно изъ линій тока, означимъ черезъ  $s$  длину дуги, считаемой отъ какой либо точки этой кривой, вдоль по ней, въ сторону движенія по ней точекъ жидкости и предположимъ, что координаты точекъ этой траекторіи выражены функціями длины  $s$ ; тогда  $u, v, w$  въ различныхъ точкахъ траекторіи могутъ быть выражены такъ:

$$u = v \frac{dx}{ds}, \quad v = v \frac{dy}{ds}, \quad w = v \frac{dz}{ds} \dots \dots \dots (72)$$

Примѣнимъ дифференціальныя уравненія (61) къ точкамъ жидкости, описывающимъ избранную нами линію тока; для этого, замѣнивъ въ нихъ  $u, v, w$  выраженіями (72), найдемъ, что первое изъ этихъ уравненій получить слѣдующій видъ:

$$v \left( \frac{\partial \left( v \frac{dx}{ds} \right)}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \left( v \frac{dx}{ds} \right)}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \left( v \frac{dx}{ds} \right)}{\partial z} \frac{dz}{ds} \right) = \rho U - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial x},$$

или, такъ какъ  $u, v, w$  суть функціи отъ  $x, y, z$ , а послѣднія, для одной и той же линіи тока, суть функціи отъ  $s$ , то это уравненіе можно представить такъ:

$$v \frac{d \left( v \frac{dx}{ds} \right)}{ds} = \rho U - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial x},$$

по тѣмъ же самымъ причинамъ остальные два дифференціальныя уравненія, примѣненные къ той же точкѣ, можно представить такъ:

$$v \frac{d \left( v \frac{dy}{ds} \right)}{ds} = \rho U - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$v \frac{d \left( v \frac{dz}{ds} \right)}{ds} = \rho U - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Помноживъ эти уравненія соответственно на  $\frac{dx}{ds} ds, \frac{dy}{ds} ds$  и  $\frac{dz}{ds} ds$  и сложивъ, получимъ слѣдующее дифференціальное равенство:

$$d \left( \frac{v^2}{2} \right) = dU - \frac{dp}{\sigma} \dots \dots \dots (73)$$

Интегрируя это уравнение, мы найдемъ, что на рассматриваемой линіи тока вы-

$$\frac{v^2}{2} = U + \Pi$$

постоянную величину, гдѣ

$$\Pi = \int \frac{dp}{\sigma} \dots \dots \dots (74)$$

То, что получено для одной изъ линій тока, въ равной степени относится и ко  
и линіи тока установившагося движенія, съ тою лишь разницею, что величины  
линейныхъ могутъ быть различны на разныхъ линіяхъ тока; если жидкость есть  
слѣдующій закону Мариотта, то

$$\Pi = \frac{1}{\mu} \log p;$$

Если же жидкость несжимаемая однородной плотности, то

$$\Pi = \frac{p}{\sigma}$$

Слѣдовательно, при установившемся движеніи несжимаемой жидкости, на  
любой линіи тока существуетъ зависимость между давленіемъ, потенціаломъ  
и скоростью, выражаемая равенствомъ:

$$p = \sigma \left( C + U - \frac{v^2}{2} \right), \dots \dots \dots (75)$$

постоянная  $C$  можетъ имѣть различныя значенія для разныхъ линій тока;  
если всѣ линіи тока суть незамкнутыя кривыя, простирающіяся въ безконеч-  
ность, и если на безконечности скорости и давленія, а также и значенія по-  
тенціала  $U$  равны одной и той же конечной величинѣ по всемъ направленіямъ,  
 $C$  должно быть одно и то же на всемъ линіяхъ тока.

Въ частности, для установившагося движенія несжимаемой жидкости подъ влія-  
ніемъ силы тяжести, когда потенціальная функція объемныхъ силъ такова:

$$U = gz.$$

если ось  $Z$  направимъ вертикально внизъ), получимъ слѣдующую зависимость между  $p$ ,  
 $v$  на каждой линіи тока

$$p = \sigma \left( C + gz - \frac{v^2}{2} \right), \dots \dots \dots (76)$$

гдѣ  $C$  есть постоянная величина на одной и той же линіи тока, но значенія  $C$ , свой-  
ственныя разнымъ линіямъ тока, могутъ быть различны.

Эта зависимость, выражаемая обыкновенно подъ видомъ:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\sigma g} + z = H \dots \dots \dots (76, a)$$

служить основною теоремою гидравлики и известна подъ именемъ теоремы *Даниэля Бернулли*.

Для установившагося движенія упругихъ жидкостей зависимость между давленіемъ, скоростью  $v$  и ординатою  $z$  выразится формулою:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_{f(p)} dp - z = H \dots\dots\dots (77)$$


---



## УЧЕНИЕ ОБЪ УПРУГИХЪ ДЕФОРМАЦІЯХЪ ТВЕРДЫХЪ ТѢЛЪ.

Прежде, чѣмъ начать изложеніе ученія объ упругихъ деформацияхъ, или такъ сказать о теоріи упругости твердыхъ тѣлъ, слѣдуетъ ознакомиться съ нѣкоторыми видами такъ называемыхъ *однородныхъ деформаций* и рассмотреть зависимость между напряжениями, дѣйствующими на площади, проведенныя черезъ одну и ту же точку тѣла; это и составляетъ содержаніе двухъ послѣдующихъ главъ: IV-й и V-й.

### IV.

#### Объ однородныхъ деформацияхъ сплошнаго тѣла.

##### § 22. Однородныя деформациа.

Представимъ себѣ сплошное тѣло, движущееся и деформирующееся такимъ образомъ, что  $f_1, f_2, f_3$  (§ 17-й. формулы (47)) суть линейныя функціи отъ  $a, b, c$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= F_1(t) + af_{11}(t) + bf_{12}(t) + cf_{13}(t) \\ y &= F_2(t) + af_{21}(t) + bf_{22}(t) + cf_{23}(t) \\ z &= F_3(t) + af_{31}(t) + bf_{32}(t) + cf_{33}(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (78)$$

гдѣ  $a, b, c$  суть начальныя координаты (въ моментъ  $t = 0$ ) любой точки  $M$  тѣла, а  $x, y, z$  — координаты той же точки въ моментъ  $t$ ; легко видѣть, что такая деформация имѣетъ слѣдующія свойства:

1) Всѣ тѣ точки тѣла, которыя въ моментъ  $t = 0$  находились въ какой либо линіи:

$$Aa + Bb + Cc + D = 0 \dots\dots\dots (79)$$

будутъ и въ моментъ  $t$  находиться въ одной плоскости, уравненіе которой получится по исключеніи  $a$ ,  $b$ ,  $c$  изъ равенствъ (78) и (79); уравненіе это — слѣдующее:

$$\begin{vmatrix} x - F_1, f_{11}, f_{12}, f_{13} \\ y - F_2, f_{21}, f_{22}, f_{23} \\ z - F_3, f_{31}, f_{32}, f_{33} \\ D, A, B, C \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (80)$$

Слѣдовательно, при такой деформации, каждая плоскость, проведенная въ тѣлѣ, остается плоскостью, хотя и измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ.

2) Какія либо двѣ параллельныя одна другой плоскости, проведенныя въ началь. ный моментъ въ тѣлѣ и выражаемыя уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} Aa + Bb + Cc + D &= 0 \\ Aa + Bb + Cc + D_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (79, bis)$$

обращаются въ плоскости, параллельныя между собою.

Дѣй параллельныя одна другой плоскости, проведенныя въ тѣлѣ въ какой либо моментъ времени, будутъ параллельныя между собою и во всѣ другіе моменты.

3) Всякая прямая линія, проведенная въ тѣлѣ въ какой либо моментъ времени, будетъ прямою и во всѣ другіе моменты.

4) Дѣй параллельныя одна другой прямая линія, проведенныя въ тѣлѣ въ какой либо моментъ времени, будутъ параллельными между собою прямыми и во всѣ другіе моменты.

5) Проведемъ въ моментъ  $t = 0$  въ тѣлѣ двѣ параллельныя одна другой прямая, на одной изъ нихъ возьмемъ двѣ точки  $M_{10}$  и  $M_{30}$  и на другой — двѣ точки  $M_{20}$  и  $M_{40}$ ; пусть  $n$  есть отношеніе величины разстоянія  $\overline{M_{10}M_{30}}$  къ величинѣ разстоянія  $M_{20}M_{40}$ . То же самое отношеніе выйдетъ съ параллельностью дляя  $M_1, M_3$  и  $M_2, M_4$  сохранится и во всѣ моменты времени; въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе выбора начальныхъ положеній точекъ:

$$a_3 - a_1 = n (a_4 - a_2), \quad b_3 - b_1 = n (b_4 - b_2); \quad c_3 - c_1 = n (c_4 - c_2); \dots (81)$$

изъ равенствъ же (78), примѣненныхъ къ точкамъ  $M_1, M_2, M_3$  и  $M_4$ , найдемъ:

$$\begin{aligned} x_3 - x_1 &= (a_3 - a_1) f_{11} + (b_3 - b_1) f_{12} + (c_3 - c_1) f_{13}, \\ x_4 - x_2 &= (a_4 - a_2) f_{11} + (b_4 - b_2) f_{12} + (c_4 - c_2) f_{13}, \end{aligned}$$

а потому, въ силу соотношеній (81), найдемъ:

$$x_3 - x_1 = n (x_4 - x_2), \quad y_3 - y_1 = n (y_4 - y_2), \quad z_3 - z_1 = n (z_4 - z_2).$$

Заметъ, что длина  $\overline{M_1 M_2}$  параллельна линіи  $M_2 M_4$  и въ  $n$  разъ болѣе

нуждая далѣе, дойдемъ до такого заключенія, что всякія двѣ взаимно подобно расположенныя фигуры, начерченныя въ тѣлѣ въ какой либо моментъ, при разсматриваемой нами деформациі тѣла, свой видъ, размѣры и пространство, будутъ все таки сохранять свое взаимное подобіе по виду и при чемъ центромъ подобія будетъ все время служить та самая точка тѣла, тѣла имъ и въ началѣ.

Представимъ себѣ неизмѣняемую среду, движущуюся поступательно вѣстѣ съ тѣломъ изъ точекъ деформирующагося тѣла; пусть это будетъ точка  $Ю$ . Проведемъ эту точку координатныя оси, параллельныя неподвижнымъ осямъ и означимъ  $x, y, z, a, b, c$  слѣдующія разности:

$$x = x_0, y = y_0, z = z_0, a = a_0, b = b_0, c = c_0,$$

числительныя координаты точекъ тѣла по отношенію къ проведеннымъ черезъ  $Ю$  осямъ.

Относительное движеніе тѣла по отношенію къ этой средѣ можетъ быть выражено слѣдующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= af_{11}(t) + bf_{12}(t) + cf_{13}(t) \\ y &= af_{21}(t) + bf_{22}(t) + cf_{23}(t) \\ z &= af_{31}(t) + bf_{32}(t) + cf_{33}(t) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (82)$$

Эти формулы будутъ имѣть одинъ и тотъ же видъ, независимо отъ выбора точки  $Ю$ , если вокругъ двухъ различныхъ точекъ тѣла выделить одинаковые по размѣрамъ и положенію объемы вещества, то деформациі этихъ двухъ объемовъ будутъ вполне тождественны и выразятся одними и тѣми же формулами (82).

Во всемъ этимъ причинамъ разсматриваемыя нами деформациі вещества называемъ *однородными деформациями* (homogeneous strain).

### § 23. Эллипсоиды деформациі и поверхность удлинненій. Кубическое изменение единицы объема вещества.

При дальнѣйшемъ изслѣдованіи свойствъ однородныхъ деформаций, мы будемъ интересоваться измѣненіемъ въ относительномъ распредѣленіи вещества тѣла вокругъ какой либо точки  $Ю$ , причемъ будемъ сравнивать распредѣленіе вещества въ моментъ  $t$  распредѣленіемъ въ моментъ  $t = 0$ .

1) Возьмемъ формулы (82) и замѣнимъ въ нихъ знаки  $x, y, z$  — знаками  $x, y, z$ ; эти формулы (82) выразятъ такую однородную деформацию, при которой начало координатъ остается неподвижнымъ.

Прежде всего огладимъ себѣ отчетъ въ томъ, какое значеніе имѣютъ коэффициенты  $a, b, c$  въ вторыхъ частяхъ формулъ (82).

Возьмемъ три точки тѣла:  $M_1$  — начальныя координаты которой суть:  $a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 0$ ,  $M_2$  — начальныя координаты которой:  $a_2 = 0, b_2 = 1, c_2 = 0$ , и  $M_3$  —

начальные координаты которой:  $a_3 = 0$ ,  $b_3 = 0$ ,  $c_3 = 1$ ; эти три точки, стало быть находятся в моментъ  $t = 0$  в разстоянн равномъ единицъ длины отъ начала координатъ  $O$ , первая — на оси  $X$ -овъ, вторая — на оси  $Y$ -овъ, третья — на оси  $Z$ -овъ.

Изъ формулъ (82) слѣдуетъ, что въ моментъ  $t$  координаты этихъ точекъ будутъ

$$\begin{array}{ccc} M_1' & M_2' & M_3' \\ x_1 = f_{11}(t), & x_2 = f_{12}(t), & x_3 = f_{13}(t) \\ y_1 = f_{21}(t), & y_2 = f_{22}(t), & y_3 = f_{23}(t) \\ z_1 = f_{31}(t), & z_2 = f_{32}(t), & z_3 = f_{33}(t). \end{array}$$

Поэтому формулы (82) можно представить такъ:

$$\left. \begin{array}{l} x = x_1 a + x_2 b + x_3 c \\ y = y_1 a + y_2 b + y_3 c \\ z = z_1 a + z_2 b + z_3 c \end{array} \right\} \dots \dots \dots (82, bis)$$

Обратимъ вниманіе на ту часть вещества тѣла, которая въ моментъ  $t = 0$  занимаетъ собою кубъ, четыре вершины котораго суть точки  $O$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  (черт. 13 на листѣ 1-мъ). Такъ какъ при однородной деформацин все прямыя линіи и плоскости остаются прямыми и плоскими, а параллельныя прямыя и плоскости сохраняютъ свою параллельность, то въ моментъ  $t$  содержимое этого куба будетъ занимать собою параллелепипедъ, четыре вершины котораго будутъ  $O$ ,  $M_1'$ ,  $M_2'$ ,  $M_3'$  (черт. 14-й); коэффициенты  $f_{11}(t)$ ,  $f_{12}(t)$ ,  $\dots$ ,  $f_{33}(t)$  суть координаты этихъ точекъ  $M_1'$ ,  $M_2'$ ,  $M_3'$ .

Длины реберъ этого параллелепипеда равны

$$\left. \begin{array}{l} OM_1' = L_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \\ OM_2' = L_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \\ OM_3' = L_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (83)$$

а косинусы угловъ между ребрами его выражаются величинами слѣдующихъ отношеній:

$$\cos (M_2' OM_3') = \frac{H_1}{L_2 L_3}, \cos (M_3' OM_1') = \frac{H_2}{L_3 L_1}, \cos (M_1' OM_2') = \frac{H_3}{L_1 L_2}, \dots (83, bis)$$

числители которыхъ  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  суть слѣдующіе тричлены:

$$\left. \begin{array}{l} H_1 = x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 \\ H_2 = x_3 x_1 + y_3 y_1 + z_3 z_1 \\ H_3 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (84)$$



2) Проведемъ изъ начала координатъ  $O$  какую либо длину  $OM = r$ . Вслѣдствіе однородности деформаціи, всѣ тѣ точки вещества, которыя въ моментъ  $t = 0$  находились на прямой  $OM$ , будутъ въ моментъ  $t$  находиться на одной прямой  $OM'$  съ новымъ положеніемъ точки  $M$ ; означимъ длину  $OM'$  черезъ  $r'$ .

Величина отношенія:

$$\frac{r' - r}{r} \dots \dots \dots (85)$$

называется *линейнымъ удлинненіемъ единицы длины по направленію  $OM$* .

Если одновременно съ  $OM$  проведемъ изъ какой либо точки  $M_1$  длину  $M_1M_2 = l$  параллельную  $OM$ , то, на основаніи сказаннаго въ 5-мъ пунктѣ предыдущаго параграфа, длина  $M_1M_2 = l'$  будетъ параллельна  $r'$  и притомъ отношеніе  $(l' : r')$  будетъ тако же отношенію  $(l : r)$ ; отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{l' - l}{l} = \frac{r' - r}{r} = e;$$

значить, что въ однородной деформаціи длины параллельныя между собою получаютъ одинаковыя удлинненія на единицу длины.

Изъ (85) слѣдуетъ, что  $r' = r(1 + e)$  или  $(r')^2 = r^2(1 + e)^2$ , а такъ какъ  $r^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ,  $(r')^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ , то на основаніи формулъ (82 bis), (83) и (84) получимъ слѣдующее равенство:

$$(a'^2 + b'^2 + c'^2)(1 + e)^2 = L_1^2 a'^2 + L_2^2 b'^2 + L_3^2 c'^2 + 2H_1 bc + 2H_2 ca + 2H_3 ab, \quad (86)$$

изъ котораго можемъ опредѣлить величину  $e$ .

Между прочимъ можемъ замѣтить, что величины удлинненій  $e_1, e_2, e_3$  единицъ длинъ линій, параллельныхъ осямъ координатъ выразятся такъ:

$$e_1 = L_1 - 1, \quad e_2 = L_2 - 1, \quad e_3 = L_3 - 1 \dots \dots \dots (87)$$

Для тѣхъ длинъ, которыя при деформаціи укорачиваются, величины  $e$  будутъ имѣть значенія отрицательныя.

3) Выдѣлимъ мысленно какую либо часть тѣла; пусть  $V$  и  $V'$  суть величины объемовъ этой части въ моменты  $t = 0$  и  $t$ . Величина отношенія:

$$\theta = \frac{V' - V}{V} \dots \dots \dots (88)$$

называется *кубическимъ расширеніемъ единицы объема* взятой части тѣла.

Объемъ куба, изображеннаго на чертежѣ 13-мъ, равенъ единицѣ, объемъ же параллелепипеда, изображеннаго на чертежѣ 14-мъ, выразится опредѣлителемъ:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}; \dots \dots \dots (89)$$

поэтому кубическое расширеніе вышесказаннаго объема будетъ равно:

$$v = D - 1 \dots \dots \dots (90)$$

Вслѣдствіе однородности деформаціи, кубическое расширеніе единицы объема одинаково во всѣхъ частяхъ тѣла.

Если  $v$  будетъ отрицательнымъ, то это покажетъ, что вещество претерпѣваетъ кубическое сжатіе.

4) Уравненія (82 bis) рѣшимъ относительно  $a, b, c$ , получимъ:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ b &= b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ c &= c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (91)$$

входящіе здѣсь коэффициенты  $a_1, b_1, \dots, c_3$  выражаются слѣдующимъ образомъ въ коэффициентахъ  $x_1, y_1, \dots, z_3$ :

$$\begin{aligned} a_1 D &= (y_2 z_3 - z_2 y_3); a_2 D = (z x_3 - x_2 z_3); a_3 D = (x_2 y_3 - y_2 x_3); \\ b_1 D &= (y_3 z_1 - z_3 y_1); b_2 D = (z_3 x_1 - x_3 z_1); b_3 D = (x_3 y_1 - y_1 x_1); \\ c_1 D &= (y_1 z_2 - z_1 y_2); c_2 D = (z_1 x_2 - x_1 z_2); c_3 D = (x_1 y_2 - y_1 x_2). \end{aligned}$$

Изъ равенствъ (91) видно, что  $a_1, b_1, c_1$  суть проэкціи на оси координатъ такой длины  $l_1$ , которая въ моментъ  $t$  совпадетъ съ осью  $X$ -овъ и будетъ тогда имѣть длину разную единицѣ; подобнымъ же образомъ:  $a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$  суть проэкціи длинъ  $l_2, l_3$ , которая въ моментъ  $t$  сдѣлаются равными единицѣ и совпадутъ съ осями  $Y$ -овъ и  $Z$ -овъ. Косинусы угловъ, составляемыхъ между собою направленіями длинъ  $l_1, l_2, l_3$  (конечно, въ моментъ  $t = 0$ ), выразятся величинами слѣдующихъ отношеній:

$$\cos (l_2, l_1) = \frac{h_1}{l_2 l_1}, \cos (l_3, l_1) = \frac{h_2}{l_3 l_1}, \cos (l_1, l_2) = \frac{h_3}{l_1 l_2}, \dots \dots \dots (92)$$

гдѣ числители суть слѣдующіе тричлены:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3, \\ h_2 &= a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1, \\ h_3 &= a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (93)$$

Равенство:  $(r')^2 = r^2 (1 + e)^2$  можно теперь, на основаніи формулъ (91), представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (1 + e)^2 (l_1^2 x^2 + l_2^2 y^2 + l_3^2 z^2 + 2h_1 yz + 2h_2 zx + 2h_3 xy) \dots (94)$$

5) Если въ моментъ  $t = 0$  опишемъ изъ центра  $O$  сферу радиуса равнаго единицѣ, то всѣ тѣ точки вещества, которыя въ моментъ  $t = 0$  были на поверхности ел., будутъ въ моментъ  $t$  на поверхности эллипсоида, выражаемаго слѣдующимъ уравненіемъ:

$$r^2 = 1 = l_1^2 x^2 + l_2^2 y^2 + l_3^2 z^2 + 2h_1 yz + 2h_2 zx + 2h_3 xy \dots \dots \dots (95)$$

6) Съ другой стороны можно провести такой эллипсоидъ, имѣющій центръ въ тѣхъ же координатъ, что всѣ точки вещества, находившіяся въ моментъ  $t = 0$  на поверхности этого эллипсоида, будутъ въ моментъ  $t$  находиться на поверхности сферы радиуса равнаго единицѣ:  $r' = 1$ ; уравненіе этого эллипсоида — слѣдующее:

$$L_1^2 a^2 + L_2^2 b^2 + L_3^2 c^2 + 2H_1 bc + 2H_2 ca + 2H_3 ab = 1 \dots \dots \dots (96)$$

Оба эти эллипсоида называются *эллипсоидами деформаци*; но, имѣя ввиду разсматривать только второй эллипсоидъ, я буду впредь только его подразумѣвать подъ именемъ эллипсоида деформаци.

7) Проведемъ въ тѣлѣ въ моментъ  $t = 0$  какую либо длину  $OM = r$ ; пусть  $M' = r'$  есть величина и направленіе этой длины въ моментъ  $t$ . Возьмемъ проэкціи длины  $r'$  на первоначальное направленіе  $r$  и составимъ отношеніе:

$$\varepsilon = \frac{r' \cos(r', r) - r}{r} = \frac{rr' \cos(r', r) - r^2}{r^2} \dots \dots \dots (97)$$

Произведеніе  $rr' \cos(r', r)$ , равное  $(xa + yb + zc)$ , можно стало быть выразить, или подъ видомъ  $r^2(1 + \varepsilon)$ , или же, на основаніи формулы §2 bis) подъ видомъ сечена:

$$x_1 a^2 + y_2 b^2 + z_3 c^2 + (y_3 + z_2)bc + (z_1 + x_3)ca + (x_2 + y_1)ab.$$

Если представимъ себѣ, что по всѣмъ направленіямъ, проведеннымъ изъ точки  $O$ , будутъ отложены радиусы векторы  $r$ , обратно пропорціональные корнямъ квадратнымъ, соответственнымъ каждому направленію величинъ  $\varepsilon$ , то геометрическое мѣсто точекъ, находящихся на концахъ этихъ радиусовъ векторовъ, будетъ поверхность второго ряда, выражаемая уравненіемъ:  $r^2 \varepsilon = K$ , т. е.:

$$(x_1 - 1)a^2 + (y_1 - 1)b^2 + (z_1 - 1)c^2 + (y_3 + z_2)bc + (z_1 + x_3)ca + (x_2 + y_1)ab = K; \dots \dots \dots (98)$$

эта поверхность называется *поверхностью деформаци*.

Величины  $\varepsilon$ , соответствующія каждому радиусу вектору этой поверхности, обратно пропорціональны квадратамъ этихъ радиусовъ векторовъ.

## § 24. Главныя оси деформаци. Разложеніе однородной деформаци на чистую деформацию и на вращеніе.

Въ деформирующемся однородномъ образѣ тѣлѣ можно найти такія направленія и такія плоскости, которыя будутъ взаимно-перпендикулярны, какъ въ моментъ  $t = 0$ , такъ и въ моментъ  $t$ .

Для опредѣленія такихъ направленій и плоскостей будемъ искать въ тѣлѣ такое направленіе  $P$ , проведенное черезъ начало координатъ  $O$  и такую, проведенную черезъ  $O$  плоскость  $\Pi$ , которыя были бы взаимно-перпендикулярны въ оба момента времени.

Пусть  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  суть косинусы угловъ, составляемыхъ этимъ направленіемъ  $P$  съ осями координатъ въ моментъ  $t = 0$ , а  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  косинусы угловъ, составляемыхъ тѣмъ же рядомъ точекъ тѣла съ осями въ моментъ  $t$ ; если на первоначальномъ направленіи  $P$  отложимъ отъ  $O$  длину равную единицѣ, то начальныя координаты конца этой длины будутъ:  $a = \lambda_x, b = \lambda_y, c = \lambda_z$ . Означимъ черезъ  $E$  линейное удлинненіе этой длины; такъ какъ разстояніе конца ея отъ  $O$  въ моментъ  $t$  будетъ  $(1 + E)$ , то координаты этой точки тогда будутъ:  $x = (1 + E) \lambda_x, y = (1 + E) \lambda_y, z = (1 + E) \lambda_z$ ; применяя сюда формулы (82 bis), получимъ слѣдующія соотношенія между косинусами угловъ составляемыхъ съ осями координатъ направленіями: начальнымъ  $OP$  и измѣненнымъ вслѣдствіе деформации —  $OP$ :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_x (1 + E) &= x_1 \lambda_x + x_2 \lambda_y + x_3 \lambda_z \\ \lambda_y (1 + E) &= y_1 \lambda_x + y_2 \lambda_y + y_3 \lambda_z \\ \lambda_z (1 + E) &= z_1 \lambda_x + z_2 \lambda_y + z_3 \lambda_z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (99, a)$$

Проведемъ, въ моментъ  $t$ , плоскость черезъ начало координатъ  $O$ , перпендикулярную къ направленію  $P'$ ; уравненіе этой плоскости  $\Pi'$  будетъ:

$$\lambda_x X + \lambda_y Y + \lambda_z Z = 0,$$

гдѣ  $X, Y, Z$  суть координаты тѣхъ точекъ тѣла, которыя въ моментъ  $t$  заключаются въ этой плоскости; пусть  $A, B, C$  суть начальныя координаты тѣхъ же точекъ.

Выразивъ, въ послѣднемъ уравненіи, косинусы  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  въ косинусахъ  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  по формуламъ (99) и координаты  $X, Y, Z$  въ координатахъ  $A, B, C$  по формуламъ (82 bis), получимъ слѣдующее уравненіе:

$$(L_1^2 \lambda_x + H_3 \lambda_y + H_2 \lambda_z) A + (H_3 \lambda_x + L_2^2 \lambda_y + H_1 \lambda_z) B + (H_2 \lambda_x + H_1 \lambda_y + L_3^2 \lambda_z) C = 0$$

той плоскости  $\Pi$ , въ которой въ моментъ  $t = 0$  находились всѣ точки тѣла, расположившіяся въ моментъ  $t$  по плоскости  $\Pi'$ . Плоскость же  $\Pi$  должна быть перпендикулярна къ направленію  $OP$ , поэтому коэффициенты координатъ  $A, B, C$  должны быть пропорціональны косинусамъ  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ ; означивъ коэффициентъ пропорціональности черезъ  $\phi$ , получимъ три слѣдующія уравненія, которымъ должны удовлетворять эти косинусы:

$$\left. \begin{aligned} L_1^2 \lambda_x + H_3 \lambda_y + H_2 \lambda_z &= \lambda_x \phi \\ H_3 \lambda_x + L_2^2 \lambda_y + H_1 \lambda_z &= \lambda_y \phi \\ H_2 \lambda_x + H_1 \lambda_y + L_3^2 \lambda_z &= \lambda_z \phi \end{aligned} \right\}; \dots \dots \dots (100)$$



того, косинусы эти связаны между собою еще четвертымъ равенствомъ:

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 \dots\dots\dots (101)$$

Если помножимъ первое изъ равенствъ (100) на  $\lambda_x$ , второе — на  $\lambda_y$ , третье — сложимъ и примемъ въ расчетъ равенство (101), то получимъ:

$$L_1 \lambda_x^3 + L_1' \lambda_y^3 + L_3 \lambda_z^3 + 2H_1 \lambda_y \lambda_z + 2H_2 \lambda_z \lambda_x + 2H_3 \lambda_x \lambda_y = \varphi.$$

Изъ равенства же (86) слѣдуетъ, что первая часть этого равенства равна  $+\lambda_y^3 + \lambda_z^3)(1 + E)^3$ , стало быть  $\varphi = (1 + E)^3$ .

Уравненія (100) суть тѣ самыя, которыя приходится рѣшать при опредѣленіи осей эллипсоида, выражаемаго уравненіемъ (96), т. е. эллипсоида деформации.

Исключивъ изъ этихъ уравненій косинусы  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\lambda_z$ , получимъ уравненіе третьей степени относительно  $\varphi$ :

$$\left. \begin{array}{l} L_1^2 - \varphi, H_3, H_2 \\ H_3, L_2^2 - \varphi, H_1 \\ H_2, H_1, L_3^2 - \varphi \end{array} \right\} = 0 \dots\dots\dots (102)$$

Если найдемъ три корня  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  этого уравненія, то изъ уравненій (100) и (102), найдемъ затѣмъ три совокупности значеній  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\lambda_z$ , опредѣляющихъ начальное положеніе трехъ направлений, соответствующихъ этимъ корнямъ.

Пусть корню  $\varphi_1$  соответствуютъ косинусы  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\lambda_z$ , а корню  $\varphi_2$  — косинусы  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ ,  $\mu_z$ ; подставивъ въ равенство (100) вмѣсто  $\varphi$  — значеніе  $\varphi_2$ , вмѣсто  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ , — величины  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ ,  $\mu_z$ , помноживъ затѣмъ первое — на  $\lambda_x$ , второе — на  $\lambda_y$ , третье — на  $\lambda_z$  и сложивъ, получимъ слѣдующее равенство:

$$(L_1^2 \lambda_x + H_3 \lambda_y + H_2 \lambda_z) \mu_x + (H_3 \lambda_x + L_2^2 \lambda_y + H_1 \lambda_z) \mu_y + (H_2 \lambda_x + H_1 \lambda_y + L_3^2 \lambda_z) \mu_z = \varphi_2 (\mu_x \lambda_x + \mu_y \lambda_y + \mu_z \lambda_z);$$

основаніи же равенствъ (100), примененныхъ къ значенію  $\varphi_1$ , первая часть составленнаго сейчасъ равенства есть ни что иное, какъ  $\varphi_1 (\lambda_x \mu_x + \lambda_y \mu_y + \lambda_z \mu_z)$ , а потому:

$$(\varphi_1 - \varphi_2) (\lambda_x \mu_x + \lambda_y \mu_y + \lambda_z \mu_z) = 0 \dots\dots\dots (103)$$

Основываясь на этомъ равенствѣ можно доказать, что всѣ три корня уравненія (102), дѣйствительны; въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что это уравненіе имѣетъ только одинъ дѣйствительный корень  $\varphi_3$ , два же прочіе суть мнимые сопряженные:  $\varphi_1 = \rho + \kappa i$ ,  $\varphi_2 = \rho - \kappa i$ , въ такомъ случаѣ и косинусы  $\lambda_x$ ,  $\mu_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\mu_y$ ,  $\lambda_z$ ,  $\mu_z$  окажутся (изъ (10)) мнимыми и попарно сопряженными, т. е.:

$$\begin{aligned} \lambda_x &= \alpha_1 + \beta_1 i, \lambda_y = \alpha_2 + \beta_2 i, \lambda_z = \alpha_3 + \beta_3 i \\ \mu_x &= \alpha_1 - \beta_1 i, \mu_y = \alpha_2 - \beta_2 i, \mu_z = \alpha_3 - \beta_3 i, \end{aligned}$$

а поэтому равенство (103) получить такой видъ:

$$2\chi(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \alpha_3^2 + \beta_3^2) + 0;$$

это требуетъ, чтобы  $\chi$  было равно нулю, т. е. корни не должны быть мнимыми.

Корни уравненія (102) не только не могутъ быть мнимыми, но даже не могутъ быть отрицательными: для того, чтобы убѣдиться въ этомъ, рассмотримъ каковы коэффиціенты у различныхъ степеней  $\phi$  въ этомъ уравненіи:

$$\begin{vmatrix} L_1^2, H_2, H_2 \\ H_2, L_2^2, H_1 \\ H_2, H_1, L_3^2 \end{vmatrix} - \phi \left\{ \begin{vmatrix} L_2^2, H_1 \\ H_1, L_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_3^2, H_2 \\ H_2, L_1^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_1^2, H_3 \\ H_3, L_2^2 \end{vmatrix} \right\} + \phi^2 (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) - \phi^3 = 0.$$

Первый членъ первой части есть ни что иное, какъ квадратъ определителя  $D$  (89); каждый изъ определителей второго порядка, входящихъ въ составъ коэффиціента первой степени  $\phi$ , равенъ суммѣ трехъ квадратовъ, напирямъ:

$$\begin{aligned} \frac{L_1^2, H_1}{H_1, L_2^2} &= (y_2 z - z_2 y_3) + (z_2 x_3 - x_2 z_3) + (x_2 y_3 - y_2 x_3) = \\ &= D^2 (a_1^2 + a^2 + a_3^2); \end{aligned}$$

поэтому уравненіе (102) можно представить такъ:

$$D^2 (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) \phi + (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) \phi^2 - \phi^3 = 0. \quad (102, bis)$$

Теперь уже прямо видно, что ни при какомъ отрицательномъ  $\phi$  первая часть этого уравненія не можетъ обратиться въ нуль.

И такъ всѣ три корня уравненія (102) положительны; изъ равенства (103) слѣдуетъ, что если корни не равны между собой, то соответственные имъ направленія взаимно-перпендикулярны. Пусть  $\phi$ , есть наибольшій изъ трехъ корней, а  $\phi_3$  — наименьшій. Удлинненія  $E_1, E_2, E_3$ , соответствующія этимъ корнямъ называются *главными удлинненіями*, а соответствующія корнямъ направленія, по которымъ проецировать эти удлинненія, называются *главными осями деформации*. Главныя оси деформации мы будемъ обозначать знаками  $\Xi, \Upsilon, Z$ , притомъ направленія этихъ осей въ моментъ  $t = 0$  будемъ обозначать такъ  $\Xi_0, \Upsilon_0, Z_0$ , въ направленія ихъ въ мом.  $t$  — такъ  $\Xi, \Upsilon, Z$ ; косинусы угловъ между этими направленіями и неподвижными осями будемъ обозначать слѣдующими знаками:

		$X$	$Y$	$Z$		$X$	$Y$	$Z$	
$E_1 = \sqrt{\phi_1}$	1	$\Xi_0$	$\lambda_x$	$\lambda_y$	$\lambda_z$	$\Xi_1$	$\lambda_x$	$\lambda_y$	$\lambda_z$
$E_2 = \sqrt{\phi_2}$	1	$\Upsilon_0$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_z$	$\Upsilon_1$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_z$
$E_3 = \sqrt{\phi_3}$	1	$Z$	$\nu_x$	$\nu_y$	$\nu_z$	$Z_1$	$\nu_x$	$\nu_y$	$\nu_z$

Косинусы угловъ, составляемыхъ осями деформаци въ моментъ  $t$  съ неподвижными, выразятся въ косинусахъ первоначальныхъ положеній по формуламъ (99, а) по слѣдующимъ:

$$\left. \begin{aligned} M_x (1 + E_2) &= x_1 \mu_x + x_2 \mu_y + x_3 \mu_z \\ M_y (1 + E_2) &= y_1 \mu_x + y_2 \mu_y + y_3 \mu_z \\ M_z (1 + E_2) &= z_1 \mu_x + z_2 \mu_y + z_3 \mu_z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (99, b)$$

$$\left. \begin{aligned} N_x (1 + E_3) &= x_1 \nu_x + x_2 \nu_y + x_3 \nu_z \\ N_y (1 + E_3) &= y_1 \nu_x + y_2 \nu_y + y_3 \nu_z \\ N_z (1 + E_3) &= z_1 \nu_x + z_2 \nu_y + z_3 \nu_z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (99, c)$$

Изъ этихъ равенствъ можно получить выражения для коэффициентовъ  $x_1, y_1, \dots$  функций отъ главныхъ линейныхъ удлинненій и восемнадцати косинусовъ, входящихъ въ равенство (99).

Умноживъ первое изъ (99, а) на  $\lambda_x$ , первое изъ (99, б) на  $\mu_x$  и первое изъ (99, в) на  $\nu_x$  и сложивъ, мы найдемъ, что во второй части множителя у  $x_1$  будетъ равенство  $\lambda_x^2 + \mu_x^2 + \nu_x^2$ , т. е. единицъ, множители же у  $x_2$  и  $x_3$  будутъ равны нулю; такъ образомъ получимъ первое изъ нижеприведенныхъ равенствъ, и подобнымъ же образомъ составимъ и остальные восемь выраженій; а именно:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (1 + E_1) \lambda_x \Lambda_x + (1 + E_2) \mu_x M_x + (1 + E_3) \nu_x N_x \\ y_1 &= (1 + E_1) \lambda_x \Lambda_y + (1 + E_2) \mu_x M_y + (1 + E_3) \nu_x N_y \\ z_1 &= (1 + E_1) \lambda_x \Lambda_z + (1 + E_2) \mu_x M_z + (1 + E_3) \nu_x N_z \end{aligned} \right\} \dots (104, a)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (1 + E_1) \lambda_y \Lambda_x + (1 + E_2) \mu_y M_x + (1 + E_3) \nu_y N_x \\ y_2 &= (1 + E_1) \lambda_y \Lambda_y + (1 + E_2) \mu_y M_y + (1 + E_3) \nu_y N_y \\ z_2 &= (1 + E_1) \lambda_y \Lambda_z + (1 + E_2) \mu_y M_z + (1 + E_3) \nu_y N_z \end{aligned} \right\} \dots (104, b)$$

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= (1 + E_1) \lambda_z \Lambda_x + (1 + E_2) \mu_z M_x + (1 + E_3) \nu_z N_x \\ y_3 &= (1 + E_1) \lambda_z \Lambda_y + (1 + E_2) \mu_z M_y + (1 + E_3) \nu_z N_y \\ z_3 &= (1 + E_1) \lambda_z \Lambda_z + (1 + E_2) \mu_z M_z + (1 + E_3) \nu_z N_z \end{aligned} \right\} \dots (104, c)$$

Такая однородная деформация, при которой направленіе главныхъ осей въ пространстве неизмѣняется, называется *чистой однородною деформацией*.

Изъ вышеприведенныхъ формулъ (104) видно, что при чистой деформаци должны существовать между собою слѣдующіе коэффициенты:  $y = z$ ,  $z_1 = x_3$ ,  $x_2 = y_1$ , вследствие чего направленія главныхъ осей остаются неизмѣнными въ пространствѣ.

Кроме того, главные оси чистой деформаци совпадаютъ съ неподвижными осями координатъ, то тогда изъ девяти коэффициентовъ деформаци только три не бу-

дуть равны нулю, а именно:  $x_1 = (1 + E_1)$ ,  $y = (1 + E_2)$ ,  $z_3 = (1 + E_3)$  и сама деформация выразится такъ:

$$x = (1 + E_1)a, \quad y = (1 + E_2)b, \quad z = (1 + E_3)c \dots \dots \dots (105)$$

Возвращаясь опять къ какой бы то ни было однородной деформации, означая через  $\xi, \eta, \zeta$  относительныя координаты какой либо точки тѣла по отношенію къ осямъ  $\Xi_1, \Upsilon_1, Z_1$  (въ моментъ  $t$ ), а через  $\alpha, \beta, \gamma$  — относительныя координаты той же точки тѣла по отношенію къ осямъ  $\Xi_0, \Upsilon_0, Z_0$  (въ моментъ  $t = 0$ ). По извѣстнымъ формуламъ преобразованія прямоугольныхъ координатъ:

$$\xi = x\lambda_x + y\lambda_y + z\lambda_z, \quad \alpha = a\lambda_x + b\lambda_y + c\lambda_z,$$

подставивъ же вмѣсто  $x, y, z$  вторыя части равенствъ (82 bis) и принявъ затѣмъ вниманіе выраженія (104) для коэффициентовъ  $x_1, y_1, \dots, z_3$ , найдемъ, что  $\xi$  выразится такъ:

$$\xi = (1 + E_1)(a\lambda_x + b\lambda_y + c\lambda_z) = (1 + E_1)\alpha;$$

такимъ образомъ окажется, что:

$$\xi = (1 + E_1)\alpha, \quad \eta = (1 + E_2)\beta, \quad \zeta = (1 + E_3)\gamma; \dots \dots \dots (106)$$

это значитъ, что если представимъ себѣ неизмѣняемую среду, неизмѣнно связанную главными осями  $\Xi, \Upsilon, Z$ , то, по отношенію къ этой средѣ, деформирующееся тѣло совершаетъ чистую деформацию, между тѣмъ какъ абсолютное движеніе этого тѣла есть соединеніе этой чистой деформации съ переноснымъ вращеніемъ вмѣстѣ съ неизмѣнною средою и осями деформаций вокругъ начала координатъ  $O$ .

Изъ выраженій (105) и (106) прямо видно, что чистая деформация можетъ быть разсматриваема какъ соединеніе трехъ линейныхъ растяженій параллельно главнымъ деформации.

Примѣръ 1-й. Прямѣнимъ сказанное въ настоящемъ параграфѣ къ опредѣленію главныхъ осей однородной деформации, выражающейся слѣдующими формулами:

$$x = a, \quad y = ga + b, \quad z = c.$$

Эта деформация состоитъ въ томъ, что всѣ плоскости, параллельныя плоскости  $YZ$ , сдвигаются параллельно оси  $Y$ -овъ на разстоянія, пропорціональныя  $a$ , т. е. разстоянію ихъ отъ плоскости  $YZ$ ; при этомъ тѣ плоскости, которыя пересекаютъ положительную ось  $X$ -овъ, сдвигаются въ сторону положительной оси  $Y$ -овъ, тѣ же, которыя пересекаютъ отрицательную ось  $X$ -овъ, сдвигаются въ сторону отрицательной оси  $Y$ -овъ. Поэтому такая деформация называется *простымъ сдвигомъ параллельно плоскости  $YZ$  по оси  $Y$ -овъ*.

Коэффициентъ  $g$ , выражаетъ величину сдвига той плоскости, которая отстоитъ отъ плоскости  $YZ$  на единицу длины. Возьмемъ ту точку тѣла, которая въ моментъ  $t = 0$  имѣетъ положеніе  $K_0$ , опредѣляемое координатами  $a = 1, b = -\frac{g}{2}, c =$



за въ моментъ  $t$  будетъ имѣть положеніе  $K_1$  (черт. 15), опредѣляемое координатами  $x_1 = 1$ ,  $y = \frac{g}{2}$ ,  $z = 0$ ; величина  $g$  равняется удвоенному тангенсу угла  $\psi$ , составленнаго направлениями  $OK_1$  и  $OK_0$  съ осью  $X$ -овъ;  $g = 2 \operatorname{tg} \psi$ .

Опредѣлимъ величины главныхъ удлинненій этой деформации, а также направленныя осей въ моменты  $t = 0$  и  $t$ .

Въ  $y_1 = g$ ,  $x_1 = y_2 = z = 1$ ,  $x_2 = x_3 = y_3 = z_1 = z_2 = 0$ , затѣмъ:

$$L_1^2 = 1 + g^2, \quad L_2^2 = L_3^2 = 1, \quad H_1 = H_2 = 0, \quad H_3 = g;$$

тѣлитель  $D$  равенъ единицѣ, поэтому кубическое расширеніе въ этой деформации равно нулю.

Уравненіе (102) въ этомъ случаѣ будетъ слѣдующее:

$$-\varphi(3+g^2) + \varphi^2(3+g^2) - \varphi^3 = (1 - \varphi)(\varphi^2 - \varphi(2+g^2) + 1) = 0;$$

т. е.  $\varphi = 0$ :

$$\varphi_1 = 1 + \frac{g^2}{2} + \sqrt{g^2 + \frac{g^4}{4}} = \left(\frac{g}{2} + \sqrt{1 + \frac{g^2}{4}}\right)^2 = (1 + E_1)^2$$

$$\varphi_2 = 1, \quad E = 0,$$

$$\varphi_3 = 1 + \frac{g^2}{2} - \sqrt{g^2 + \frac{g^4}{4}} = \left(\sqrt{1 + \frac{g^2}{4}} - \frac{g}{2}\right)^2 = (1 + E_3)^2.$$

Заменяя  $g$  черезъ  $2 \operatorname{tg} \psi$ , найдемъ, что  $\sqrt{\varphi_1}$  и  $\sqrt{\varphi_3}$  выражаются такъ:

$$\sqrt{\varphi_1} = \frac{1 + \sin \psi}{\cos \psi} = \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right)$$

$$\sqrt{\varphi_3} = \frac{1 - \sin \psi}{\cos \psi} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_1}}.$$

Въ какъ уголь  $\psi$ , а слѣдовательно также и  $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right)$ , менѣе прямаго, то  $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) < 45^\circ$ , а потому  $\sqrt{\varphi_1}$  болѣе единицы и  $\sqrt{\varphi_3}$  менѣе единицы; изъ этого слѣдуетъ, что  $E_1$  есть величина положительная и выражаетъ расширеніе, а  $E_3$  есть величина отрицательная и выражаетъ сжатіе. Величины ихъ суть:

$$E_1 = \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right) - 1, \quad E_3 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right) - 1.$$

Заменяя уравненія (100) и (101) къ той главной оси  $Y$ , которая не получила удлинненія, ни сжатія, мы найдемъ, что они въ настоящемъ случаѣ будутъ:

$$g^2 \mu_x + g \mu_y = 0, \quad g \mu_x = 0, \quad \mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2 = 1.$$

Изъ слѣдуетъ:  $\mu_x = 0$ ,  $\mu_y = 0$ ,  $\mu_z = \pm 1$ , т. е., что ось  $Y$  совпадаетъ въ моменты  $t = 0$  и въ моментъ  $t$  съ осью  $Z$ -овъ. Изъ выраженій (99, б) видно, что то же самое положеніе эта ось и въ моментъ  $t$ .

Поэтому объѣ другія главныя оси находятся въ плоскости  $XU$ , такъ что  $\lambda_z$ ,  $\lambda_y$ ,  $N_x$  равны нулю.

Для опредѣленія положенія оси наибольшаго удлинненія  $\Xi$  въ моментъ  $t=0$ , достаточно будетъ взять слѣдующее изъ уравненій (100):

$$(q' + 1 - \tau_1) \lambda_x + g \lambda_y = 0,$$

которое, послѣ надлежащихъ сокращеній, можно представить такъ:

$$-(\sqrt{1 + \frac{g^2}{4}} - \frac{g}{2}) \lambda_x + \lambda_y = 0,$$

а отсюда слѣдуетъ:

$$\frac{\lambda_y}{\lambda_x} = \operatorname{tg}(\Xi_0, X) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2}\right);$$

такъ что ось  $\Xi_0$  составляетъ съ осью  $X$ -овъ уголъ  $(\frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2})$ , а стало быть той же самый уголъ составляетъ ось наибольшаго сжатія  $Z$ , съ отрицательною осью  $Y$ -овъ, т. е. ось  $Z_0$  должна дѣлить уголъ  $YOK_1$  пополамъ. Если изъ центра  $O$  провести кругъ радиусомъ равнымъ  $OK_1$  (черт. 15-й) и точку  $A$  соединить съ  $K_0$ , то направление  $AK_0$  будетъ параллельно оси  $Z_0$ , а направление  $BK_0$  — параллельно оси  $\Xi$ .

По формуламъ (99) найдемъ положенія осей  $\Xi_1$  и  $Z_1$  въ моментъ  $t$ ; окажется

$$\lambda_x = \frac{E_1}{1 + E_1} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2}\right), \quad \lambda_y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2}\right),$$

т. е. ось  $\Xi_1$  дѣлитъ пополамъ уголъ  $K_0 O Y$ ; направление  $BK_1$  параллельно оси  $\Xi$ , направление  $AK_1$  параллельно оси  $Z_1$ .

Сдвигаемыя плоскости, параллельныя плоскости  $YZ$ , не претерпѣваютъ искаженія; кромѣ того, есть еще другая система параллельныхъ между собою плоскостей, которыхъ въ моментъ  $t$  расположеніе точекъ тѣла тождественно съ тѣмъ, которое бы въ моментъ  $t=0$ ; это именно суть тѣ плоскости, которыя вначалѣ были параллельны плоскости  $ZOK_1$ , а въ моментъ  $t$  стали параллельными плоскости  $ZOK_1$ ; по направленіямъ, заключающимся въ этихъ плоскостяхъ, вещество не получило ни растяженія, ни сжатія.

Чистая часть деформаций при простомъ сдвигѣ состоитъ изъ линейнаго растяженія по оси  $\Xi$ , равнаго  $E_1$ , и изъ линейнаго сжатія по оси  $Z$ , равнаго  $E_3$ , то есть отрицательно взятому отношенію  $E_3$  къ  $1 + E_1$ ; всякая длина параллельная оси  $\Xi$  увеличивается въ отношеніи  $(1 + E_1)$  къ единицѣ, всякая же длина параллельная оси  $Z$  уменьшается въ отношеніи единицы къ  $(1 + E_1)$ . Если ось  $\Xi$  будетъ неизмѣнно направлена по оси  $Y$ -овъ, а ось  $Z$  по оси  $X$ -овъ, то такая чистая деформалія выразится такъ:

$$x = \frac{1}{1 + E_1} a = \left(\sqrt{1 + \frac{g^2}{4}} - \frac{g}{2}\right) a = a \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2}\right),$$

$$y = (1 + E_1) b = \left(\sqrt{1 + \frac{g^2}{4}} + \frac{g}{2}\right) b = b \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2}\right), \quad z = c.$$

## § 23. Коническія поверхности равнаго удлинненія. Непискажающіяся поверхности.

Изъ уравненій (86) и (94) параграфа 23-го слѣдуетъ, что направленія, по которымъ удлинненіе имѣетъ одинаковую величину  $e$  (не большую  $E_1$  и не меньшую  $E_2$ ), являются производящими конической поверхности втораго порядка, видъ которой въ разныхъ состояніяхъ тѣла выражается уравненіемъ (86), а при состояніи тѣла въ моментъ  $t$  — уравненіемъ (94); каждая такая поверхность называется *коническою поверхностью равныхъ удлинненій*.

Радиусы векторовъ эллипсоида деформации, лежащихъ на одной и той же конической поверхности этого рода, равны между собою.

Коническая поверхность удлинненій равныхъ  $E_2$  состоитъ изъ двухъ плоскостей, сходящихся по средней оси эллипсоида деформации и образующихъ круговыя сѣченія этого эллипсоида.

Углы между радиусами векторами, находящимися въ одной и той же плоскости сѣченія, остаются неизмѣненными при деформации; чтобы убѣдиться въ этомъ, выразимъ косинусъ угла, составляемаго съ осью  $Y$  какииъ либо радиусомъ  $r'$  въ моментъ  $t$ ; это выраженіе будетъ:

$$\frac{xM_x + yM_y + zM_z}{r'}$$

Если сюда вмѣсто  $x, y, z$  — выраженія (82 bis) и вмѣсто  $M_x, M_y, M_z$  — выраженія (9, b), найдемъ, что на основаніи равенствъ (100), примѣненныхъ къ оси  $Y$ , данное выраженіе получитъ слѣдующій видъ:

$$(1 + E_2) \frac{a\mu_x + b\mu_y + c\mu_z}{r'}$$

Радиусъ векторъ заключается въ плоскости одного изъ круговыхъ сѣченій, то есть  $(1 + E_2)$ , а потому предыдущее выраженіе обратится въ:

$$\frac{a\mu_x + b\mu_y + c\mu_z}{r}$$

т. е. косинусъ угла, составляемаго начальнымъ направленіемъ  $r$  съ начальнымъ направлениемъ оси  $Y$ .

Следовательно всякія фигуры, начерченныя въ плоскостяхъ круговыхъ сѣченій эллипсоида, остаются только расширеніемъ  $E_2$  по всѣмъ направленіямъ, не претерпѣвая искаженія; плоскости параллельныя круговымъ сѣченіямъ эллипсоида деформации могутъ считаться *неискажающимися плоскостями*.

Въ частной деформации, разсмотрѣнной въ концѣ предыдущаго параграфа, неискажающіяся плоскости параллельны направленіямъ:

$$a = \pm b (1 + E_1) = \pm b \cotg \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right)$$

и въ моментъ же  $t$  онѣ параллельны направленіямъ:

$$+x(1 + E_1) = y; \quad x = +y \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right).$$

## § 26. О соединеніи однородныхъ деформаций.

Въ параграфѣ 24-мъ было уже упомянуто, что всякую чистую деформацию можно разсматривать, какъ соединеніе трехъ растяженій параллельно главнымъ осямъ чистой деформации.

Кромѣ того, всякую чистую деформацию можно еще образовать изъ чистаго сдвига изъ растяженія или сжатія перпендикулярнаго къ плоскости сдвига и изъ равномернаго растяженія или сжатія по всѣмъ направленіямъ.

Въ самомъ дѣлѣ, подвергнемъ тѣло сначала чистому сдвигу въ плоскости  $XY$  такому, чтобы ось  $X$ -овъ была осью наибольшаго растяженія  $E$ , а ось  $Y$ -овъ — осью наибольшаго сжатія ( $-E: 1 \rightarrow E$ ); результатъ этой деформации будетъ:

$$x = a (1 + E), \quad y = \frac{b}{1 + E}, \quad z = c.$$

Затѣмъ, подвергнемъ деформированное тѣло растяженію равному  $B$  по оси  $Z$ -овой. Новыя координаты  $(x), (y), (z)$  выразятся въ координатахъ  $x, y, z$  такъ:

$$(x) = x, \quad (y) = y, \quad (z) = z (1 + B).$$

Наконецъ подвергнемъ послѣ этого тѣло равномерному растяженію  $A$  по всѣмъ направленіямъ, послѣ чего точки тѣла будутъ имѣть координаты  $((x)), ((y)), ((z))$ , выражаемыя въ предыдущихъ координатахъ такъ:

$$((x)) = x (1 + A), \quad ((y)) = y (1 + A), \quad ((z)) = z (1 + A).$$

Результатъ этихъ трехъ деформаций выразится слѣдующимъ образомъ въ координатахъ  $a, b, c$ :

$$((x)) = a (1 + E) (1 + A),$$

$$((y)) = b \frac{1 + A}{1 + E},$$

$$((z)) = c (1 + B) (1 + A).$$

Отсюда слѣдуетъ, что всякую чистую деформацию съ главными удлинненіями  $E_1, E_2, E_3$  можно разложить на чистый сдвигъ съ удлинненіемъ  $E$  по оси  $X$ -овъ, на растяженіе  $B$  по оси  $Z$ -овъ и на равномерное удлинненіе  $A$  по всѣмъ направленіямъ.  $E, B$  и  $A$  выразятся такъ:

$$1 + E = \sqrt{\frac{1 + E_1}{1 + E_2}}, \quad 1 + A = \sqrt{(1 + E_1)(1 + E_3)},$$

$$1 + B = \frac{1 + E_3}{1 + A} = \frac{1 + E_3}{\sqrt{(1 + E_1)(1 + E_2)}}.$$

Въ этомъ случаѣ совершенно безразлично, въ какой послѣдовательности эти три деформации приложены къ тѣлу; вообще же говоря результатъ послѣдующаго приложенія двухъ или нѣсколькихъ однородныхъ деформаций измѣняется



тѣмъ порядка приложенія деформацій. Такъ, наприкладъ, если тѣло будетъ подвергнуто сначала растяженію  $k$  по оси  $X$ -овъ:

$$x = a(1 + k), \quad y = b, \quad z = c,$$

затѣмъ слѣдующей деформаціи:

$$(x) = -y, \quad (y) = x(1 + \kappa), \quad (z) = z,$$

результатъ этихъ двухъ деформацій будетъ такой:

$$(x) = -b, \quad (y) = a(1 + k)(1 + \kappa), \quad (z) = c,$$

— растяженіе по оси  $\Xi$ , равное  $(k + \kappa + k\kappa)$ , сопровождаемое поворотомъ осей деформации на прямой уголъ слѣва на право, причемъ ось растяженія ( $\Xi$ ) сначала совпадаетъ съ осью  $X$ -овъ, а послѣ конецъ совпадаетъ съ осью  $Y$ -овъ.

Если же переимѣнить порядокъ деформацій, приложивъ сначала деформацію:

$$x = -b, \quad y = a(1 + \kappa), \quad z = c,$$

затѣмъ растяженію  $k$  по оси  $X$ -овъ:

$$(x) = x(1 + k), \quad (y) = y, \quad (z) = z,$$

результатъ будетъ слѣдующій:

$$(x) = -b(1 + k), \quad (y) = a(1 + \kappa), \quad (z) = c;$$

— растяженіе по оси  $\Xi$ , равное  $k$ , и растяженіе по оси  $\Upsilon$ , равное  $\kappa$ , сопровождаемое поворотомъ осей деформации слѣва на право на прямой уголъ, причемъ оси  $\Xi_0$  и  $\Upsilon_0$  лежали: первая — съ положительною осью  $Y$ -овъ и вторая — съ отрицательною осью  $X$ -овъ, оси же  $\Xi$  и  $\Upsilon$  совпадаютъ: первая — съ отрицательною осью  $X$ -овъ, вторая — съ отрицательною осью  $Y$ -овъ.

Разсмотримъ теперь слѣдующій примѣръ.

Примѣръ 2-й.

Начала произведенъ простой сдвигъ величиною  $g$ , тотъ самый, который разсмотрѣнъ въ примѣрѣ 1-мъ:

$$x = a, \quad y = ag + b, \quad z = c;$$

затѣмъ произведенъ сдвигъ такой же величины, но параллельно плоскости  $ZX$  и при направленіи положительной оси  $X$ -овъ:

$$(x) = x + yg, \quad (y) = y, \quad (z) = z.$$

Въ результатъ получается слѣдующая чистая деформація:

$$(x) = a(1 + g^2) + bg, \quad (y) = ag + b, \quad (z) = c.$$

Очевидно, что здѣсь, какъ и въ примѣрѣ 1-мъ, одинъ изъ корней  $\varphi$  равенъ единицѣ и соответствующая ему главная ось совпадаетъ съ осью  $Z$ ; назовемъ двѣ другія главные оси — осями  $\Xi$  и  $\Upsilon$ , а соответствующіе имъ корни означимъ черезъ  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Здѣсь

$$L_1^2 = 1 + 3g^2 + g^4, \quad L_2^2 = 1 + g^2, \quad H_3 = 2g \left(1 + \frac{g^2}{2}\right), \quad D = 1;$$

уравненіе, опредѣляющее корни  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$1 - \varphi (2 + 4g^2 + g^4) + \varphi^2 = 0,$$

самые корни суть:

$$\varphi_1 = 1 + 2g^2 + \frac{g^4}{2} + \sqrt{4g^2 + 5g^4 + 2g^6 + \frac{g^8}{4}},$$

$$\varphi_2 = 1 + 2g^2 + \frac{g^4}{2} - \sqrt{4g^2 + 5g^4 + 2g^6 + \frac{g^8}{4}},$$

$$\varphi_1 = \left(1 + \frac{g^2}{2} + g \sqrt{1 + \frac{g^2}{4}}\right)^2, \quad \varphi_2 = \left(1 + \frac{g^2}{2} - g \sqrt{1 + \frac{g^2}{4}}\right)^2,$$

$$E_1 = g \left(\frac{g}{2} + \sqrt{1 + \frac{g^2}{4}}\right), \quad E_2 = -g \left(\sqrt{1 + \frac{g^2}{4}} - \frac{g}{2}\right).$$

Такъ какъ

$$L_1^2 - \varphi_1 = -H_3 \left(\sqrt{1 + \frac{g^2}{4}} - \frac{g}{2}\right), \quad H_3 = 2g \left(1 + \frac{g^2}{2}\right),$$

то окажется, что ось  $\Xi$  имѣетъ слѣдующее положеніе:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} (\Xi, X) = \sqrt{1 + \frac{g^2}{4}} - \frac{g}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right).$$

Если же эти два сдвига будутъ произведены въ обратномъ порядкѣ, то результатъ ихъ будетъ опять чистая деформация:

$$(x) = a + bg, \quad (y) = ag + b(1 + g^2), \quad (z) = c.$$

Здѣсь

$$L_1^2 = 1 + g^2, \quad L_2^2 = 1 + 3g^2 + g^4, \quad H_3 = 2g \left(1 + \frac{g^2}{2}\right), \quad D = 1,$$

корни и величины  $E_1$  и  $E_2$  тѣ же, но:

$$L_1^2 - \varphi_1 = -H_3 \left(\frac{g}{2} + \sqrt{1 + \frac{g^2}{4}}\right),$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} (\Xi, X) = \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right);$$

т. е. теперь ось  $\Xi$  составляетъ уголъ  $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right)$  съ осью  $Y$ -въ.

Такая деформация можетъ быть названа *единицымъ сдвигомъ* въ плоскости  $XY$ .

Два какия либо чистыя деформаціи, приложенныя одна за другою, даютъ въ результатъ деформацію сопровождаемую вращеніемъ. Предоставляемъ читателю убѣдиться въ томъ, что величины главныхъ удлинненій составной деформаціи не зависятъ отъ того, въ какомъ порядкѣ были приложены составляющіи чистыя деформаціи.

## § 27. Объ однородныхъ ничтожно-малыхъ деформаціяхъ.

Подъ этимъ именемъ подразумѣваются такія однородныя деформаціи, коэффициенты которыхъ  $x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2$  настолько малы, а коэффициенты  $x_1, y_3, z_3$  настолько близки къ единице, что можно пренебречь квадратами и произведеніями этихъ величинъ сравнительно съ ихъ первыми степенями.

При такой деформации перемещенія точекъ тѣла ничтожно малы сравнительно съ первоначальными величинами координатъ.

Пусть:

$$\left. \begin{aligned} x &= a(1 + \varepsilon_1) + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3, \\ y &= ax_1 + b(1 + \varepsilon_2) + c\varepsilon_1, \\ z &= ax_2 + bx_1 + c(1 + \varepsilon_3), \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (107)$$

одна изъ такихъ ничтожно-малыхъ деформацій.

Составивъ выраженія (87), (84) и (90) параграфа (23), а также выраженія (88) и пренебрегая въ нихъ квадратами, произведеніями и высшими степенями ничтожно-малыхъ величинъ  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon$  сравнительно съ первыми ихъ степенями, найдемъ слѣдующее:

$$e_1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_1} - 1 = \varepsilon_1, \quad e_2 = \varepsilon_2, \quad e_3 = \varepsilon_3 \dots \dots \dots (108)$$

$$\cos(M_2'OM_3') = \frac{x_1 + \varepsilon_1}{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_3)} = x_1 + \varepsilon_1, \quad \cos(M_3'OM_1') = x_2 + \varepsilon_2,$$

$$\cos(M_1'OM_2') = x_3 + \varepsilon_3, \quad \theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \dots \dots \dots (109)$$

Слѣдовательно, при однородной ничтожно-малой деформации коэффициенты  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  суть величины удлинненій единицы длины, параллельныхъ осямъ координатъ, суммы  $(x_1 + \varepsilon_1), (x_2 + \varepsilon_2), (x_3 + \varepsilon_3)$  выражаютъ величины косинусовъ угловъ, образуемыхъ осями деформации тѣла направленіями, которыя первоначально параллельны осямъ координатъ, а сумма  $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$  выражаетъ величину относительнаго расширенія единицы объема вещества.

Два какия либо ничтожно-малыя деформаціи, сообщенныя одному и тому же телу, даютъ въ результатъ также ничтожно-малую деформацію, коэффиціенты которой равны суммамъ соответствующихъ коэффиціентовъ составныхъ деформацій; въ самомъ дѣлѣ, если первая и вторая ничтожно-малыя деформаціи суть (107) и слѣдующая:

$$(x) = x(1 + \varepsilon_1') + y\varepsilon_2' + z\varepsilon_3',$$

$$(y) = x\varepsilon_2' + y(1 + \varepsilon_2') + z\varepsilon_1',$$

$$(z) = x\varepsilon_3' + y\varepsilon_1' + z(1 + \varepsilon_3'),$$

то, пренебрегая произведеніями коэффициентовъ сравнительно съ первыми степенями ихъ, получимъ:

$$(x) = a (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1') + b (\varepsilon_3 + \varepsilon_3') + c (\varepsilon_2 + \varepsilon_2'),$$

$$(y) = a (\kappa_3 + \kappa_3') + b (1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_2') + c (\varepsilon_1 + \varepsilon_1'),$$

$$(z) = a (\kappa_2 + \kappa_2') + b (\kappa_1 + \kappa_1') + c (1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_3').$$

Отсюда видно еще, что совершенно безразлично, въ какомъ порядкѣ будутъ произведены ничтожно-малыя деформации одна за другою и что результатъ будетъ тотъ же самый, если оба деформации будутъ произведены одновременно.

При ничтожно-малой деформации величины главныхъ удлиненій  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  ничтожно-малы, а также ничтожно-малы и измѣненія косинусовъ угловъ при вращеніи осей, такъ что, наприхлѣръ,  $\lambda_r$  разлится отъ  $\lambda_x$  на ничтожно-малую величину  $\Delta\lambda_r$ . Пренебрегая квадратами и произведеніями ничтожно-малыхъ величинъ и принимая во вниманіе, что:

$$\lambda_x \Delta\lambda_x + \mu_x \Delta\mu_x + \nu_x \Delta\nu_x = 0,$$

$$\lambda_y \Delta\lambda_y + \mu_y \Delta\mu_y + \nu_y \Delta\nu_y = 0,$$

$$\lambda_z \Delta\lambda_z + \mu_z \Delta\mu_z + \nu_z \Delta\nu_z = 0,$$

найдемъ изъ формулъ (104) слѣдующія выраженія для коэффициентовъ ничтожно-малой деформации:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \varepsilon_1 &= 1 + E_1 \lambda_x^2 + E_2 \mu_x^2 + E_3 \nu_x^2 \\ 1 + \varepsilon_2 &= 1 + E_1 \lambda_y^2 + E_2 \mu_y^2 + E_3 \nu_y^2 \\ 1 + \varepsilon_3 &= 1 + E_1 \lambda_z^2 + E_2 \mu_z^2 + E_3 \nu_z^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (110)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= g_1 - \omega_1, & \varepsilon_2 &= g_2 + \omega_1, & \varepsilon_3 &= g_3 - \omega_3 \\ \kappa_1 &= g_1 + \omega_1, & \kappa_2 &= g_2 - \omega_2, & \kappa_3 &= g_3 + \omega_3 \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (111)$$

гдѣ:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= E_1 \lambda_y \lambda_z + E_2 \mu_y \mu_z + E_3 \nu_y \nu_z \\ g_2 &= E_1 \lambda_z \lambda_x + E_2 \mu_z \mu_x + E_3 \nu_z \nu_x \\ g_3 &= E_1 \lambda_x \lambda_y + E_2 \mu_x \mu_y + E_3 \nu_x \nu_y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (112)$$

$$\omega_1 = \lambda_y \Delta\lambda_z + \mu_y \Delta\mu_z + \nu_y \Delta\nu_z = -(\lambda_z \Delta\lambda_y + \mu_z \Delta\mu_y + \nu_z \Delta\nu_y)$$

$$\omega_2 = \lambda_x \Delta\lambda_z + \mu_x \Delta\mu_z + \nu_x \Delta\nu_z = -(\lambda_z \Delta\lambda_x + \mu_z \Delta\mu_x + \nu_z \Delta\nu_x)$$

$$\omega_3 = \lambda_x \Delta\lambda_y + \mu_x \Delta\mu_y + \nu_x \Delta\nu_y = -(\lambda_y \Delta\lambda_x + \mu_y \Delta\mu_x + \nu_y \Delta\nu_x).$$

Отсюда слѣдуетъ, что всякая ничтожно-малая деформация можетъ быть разложена на ничтожно-малую чистую деформацию:



$$\left. \begin{aligned} x &= a(1 + \epsilon_1) + bg_2 + cg_3 \\ y &= ag_2 + b(1 + \epsilon_2) + cg_1 \\ z &= ag_3 + bg_1 + c(1 + \epsilon_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (113)$$

ничтожно-малое вращение:

$$x = a + \omega_1 c - \omega_2 b, \quad y = b + \omega_2 a - \omega_1 c, \quad z = c + \omega_1 b - \omega_2 a \dots\dots (114)$$

Ничтожно-малыя измѣненія, получаемыя координатами точекъ при этомъ вращеніи, т. е. разности  $(x - a)$ ,  $(y - b)$ ,  $(z - c)$ , выражаются формулами, совершенно аналогичными тѣмъ формуламъ кинематики твердаго тѣла, которыя выражаютъ проэкціи скоростей точекъ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ начала координатъ (см. формулы (96) стр. 85-й кинемат. части составленнаго мною курса); притомъ выраженія  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  аналогичны выраженіямъ проэкцій  $P, Q, R$  угловой скорости на координатъ  $X, Y, Z$ , если эти проэкціи выражены въ косинусахъ  $\lambda_x, \lambda_y, \dots, \lambda_z$  производныхъ отъ этихъ косинусовъ по времени (см. формулы (95) стр. 84-й кинемат. части того же курса); разница между выраженіями для  $P, Q, R$  и для  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  состоитъ въ томъ, что въ послѣднихъ находятся приращенія  $\Delta\lambda_x, \Delta\lambda_y, \dots, \Delta\lambda_z$  вмѣстѣ же мѣстахъ, на которыхъ находятся производныя  $\lambda'_x, \lambda'_y, \dots, \lambda'_z$  въ первыхъ.

Изъ этой аналогіи видно, что  $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$  есть ничтожно-малое угловое перемѣщеніе тѣла при вращеніи (114) и что направленіе, составляющее съ осями координатъ углы, косинусы которыхъ равны отношеніямъ:

$$\frac{\omega_1}{\omega}, \quad \frac{\omega_2}{\omega}, \quad \frac{\omega_3}{\omega},$$

угловая ось вращенія тѣла; такъ что тѣло, при вращеніи (114), поворачивается какъ твердое тѣло вокругъ этой оси на ничтожно-малый уголъ  $\omega$ .

Величины  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  можно назвать *проэкціями на оси  $X, Y, Z$  углового перемѣщенія тѣла  $\omega$*  при ничтожно-малой деформациі (107).

Чистая деформациія (113) можетъ быть разложена на шесть составляющихъ чистыхъ деформациій, а именно:

ничтожно-малое растяженіе величины $\epsilon_1$ (на единицу длины) параллельно оси $X$ -овъ,	
" " " " $\epsilon_2$ " " $Y$ -овъ,	
" " " " $\epsilon_3$ " " $Z$ -овъ,	
на двойной сдвигъ величины $2g_1$ въ плоскости $YZ$ ,	
" " " " $2g_2$ " " $ZX$ .	
" " " " $2g_3$ " " $XY$ .	

Величины  $g_1, g_2, g_3$  и проэкціи углового перемѣщенія выражаются такъ:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{2} (x_1 + z_1) \\ g_2 &= \frac{1}{2} (z_2 + x_2) \\ g_3 &= \frac{1}{2} (x_3 + z_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots (115)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} (x_1 - z_1) \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} (z_2 - x_2) \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} (x_3 - z_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots (116)$$

V.

Объ эллипсоидѣ напряженій и поверхности направленій.

§ 28. Главныя напряженія.

Въ этой главѣ рассмотримъ зависимость между напряженіями, дѣйствующими на всевозможныя площадки, проведенныя черезъ одну и ту же точку  $M$  внутри тѣла.

Въ § 9-мъ было уже показано, что если будемъ знать величины:

$$X_x, Y_x, Z_x, X_y, Y_y, Z_y, X_z, Y_z, Z_z$$

для какой либо точки  $M$  сплошнаго тѣла, то, при помощи формулъ (14), будемъ имѣть возможность опредѣлить проэкции на оси координатъ напряженія, дѣйствующаго въ той же точкѣ (и отнесеннаго къ единицѣ площади) на площадку, нормаль къ которой имѣетъ какое угодно направленіе.

Въ § же 11-мъ было показано, что  $Y_z = Z_y, Z_x = X_z, X_y = Y_x$ .

Такимъ образомъ мы уже имѣемъ въ формулахъ (14) выраженіе той зависимости которую намъ предстоитъ здѣсь рассмотреть. Введя обозначенія:

$$N_1 = N_x = X_x, N_2 = N_y = Y_y, N_3 = N_z = Z_z \quad \dots \dots (117, a)$$

$$T_1 = T_{yz} = Z_y = Y_z, T_2 = T_{zx} = X_z = Z_x, T_3 = T_{xy} = Y_x = X_y \quad (117, b)$$

$$\lambda = \cos (n, X), \mu = \cos (n, Y), \nu = \cos (n, Z),$$

представимъ эти формулы подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\left. \begin{aligned} F_n \cos (F_n, X) &= X_n = N_1 \lambda + T_3 \mu + T_2 \nu \\ F_n \cos (F_n, Y) &= Y_n = T_3 \lambda + N_2 \mu + T_1 \nu \\ F_n \cos (F_n, Z) &= Z_n = T_2 \lambda + T_1 \mu + N_3 \nu \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14 bis)$$

Прежде всего обратимъ вниманіе на возможность найти такія положенія площадки, при которыхъ напряженіе будетъ направлено перпендикулярно къ площадкѣ; а самомъ дѣлѣ, предположивъ, что:

$$X_n = \pm \lambda F, Y_n = \pm \mu F, Z_n = \pm \nu F,$$

получимъ изъ уравненій (14 bis) равенства:

$$\left. \begin{aligned} (N_1 - (\pm F)) \lambda + T_3 \mu + T_2 \nu &= 0 \\ T_3 \lambda + (N_2 - (\pm F)) \mu + T_1 \nu &= 0 \\ T_2 \lambda + T_1 \mu + (N_3 - (\pm F)) \nu &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (118)$$

которых (и изъ равенства  $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ ) предстоитъ найти такое направле-  
 ние  $n$ , чтобы напряженіе  $F$ , приложенное къ площадкѣ перпендикулярной къ  $n$ , было  
 направлено вдоль по  $n$  (знакъ  $+$ ), или противоположно  $n$  (знакъ минусъ).

Такъ какъ эти равенства сходны по виду съ равенствами (100) предыдущей  
 главы, то безъ новаго доказательства можемъ утвердительно сказать, что навѣрно су-  
 ществуютъ три взаимно перпендикулярныя площадки такія, на которыя дѣйствуютъ  
 напряженія по нормалямъ или противоположно нормалямъ. Величины напряженій, дѣй-  
 ствующихъ на эти площадки, суть три корня  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  уравненія третьей степени:

$$\begin{array}{ccccccc} N_1 - \Gamma, & T_3, & & T_3, & & & \\ T_1, & N_2 - \Gamma, & T_1, & & & & \\ T, & T_1, & N_1 - \Gamma & & & & \end{array} = 0, \dots\dots\dots (119)$$

суть:

$$A - B\Gamma + C\Gamma^2 - \Gamma^3 = 0, \dots\dots\dots (119, bis)$$

$$A = N_1 N_2 N_3 - N_1 N_2 T_1^2 - N_3 N_1 T_2^2 - N_1 N_3 T_3^2 + 2 T_1 T_2 T_3,$$

$$B = N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2$$

$$C = N_1 + N_2 + N_3.$$

Всѣ три корня этого уравненія дѣйствительны, но они могутъ быть какъ поло-  
 жительными, такъ и отрицательными: положительный корень выражаетъ натяженіе,  
 отрицательный — давленіе на соответственную площадку.

Эти три напряженія  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  называются *главными напряженіями въ раз-  
 триваемой точкѣ тѣла*.

Направленія нормалей  $n_1, n_2, n_3$  къ тѣмъ взаимно перпендикулярнымъ площад-  
 камъ, на которыя дѣйствуютъ главные напряженія  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ , определяются изъ ра-  
 венствъ (118) и изъ равенства  $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ ; если подставимъ въ равенство (118)  
 вмѣсто  $\Gamma$  вмѣсто  $+F$ , то найдемъ  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$  — косинусы угловъ, составляемыхъ на-  
 правленіемъ  $n_1$  съ осями координатъ; подобнымъ же образомъ, подставивъ  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$ ,  
 найдемъ  $\lambda_2, \mu_2, \nu_2$  и  $\lambda_3, \mu_3, \nu_3$  — косинусы угловъ, составляемыхъ направленіями  $n_2, n_3$ .  
 На эти же напряженія дѣйствуютъ на площадки, нормали которыхъ прямо противопо-  
 ложны.

Если повернуть оси координатъ такимъ образомъ, чтобы новая ось X-овъ была  
 параллельна нормали  $n_1$ , новая ось Y-овъ — параллельна нормали  $n_2$ , то выраженія  
 (119 bis) получать слѣдующій видъ:

$$\left. \begin{array}{l} F_n \cos (F_n, X) = X_n = \Gamma_1 \lambda \\ F_n \cos (F_n, Y) = Y_n = \Gamma_2 \mu \\ F_n \cos (F_n, Z) = Z_n = \Gamma_3 \nu \end{array} \right\} \dots\dots\dots (120)$$

$$\lambda = \cos (n, n_1), \mu = \cos (n, n_2), \nu = \cos (n, n_3).$$

### § 29. Эллипсоидъ напряженій.

Рѣшивъ равенство (120) относительно  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , возвысивъ полученные выраженія этихъ косинусовъ въ квадратъ и сложивъ, получимъ слѣдующее уравненіе:

$$\frac{X_n^2}{\Gamma_1^2} + \frac{Y_n^2}{\Gamma_2^2} + \frac{Z_n^2}{\Gamma_3^2} = 1 \dots \dots \dots (121)$$

Это уравненіе выражаетъ, что если построимъ эллипсоидъ, центръ котораго расположимъ въ рассматриваемой точкѣ  $M$  тѣла, главные оси направимъ по нормалямъ  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  и дадимъ главнымъ полуосямъ его величины во столько разъ большія единицы длины, во сколько  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  болѣе единицы напряженія, то радіусы векторы такого эллипсоида будутъ представлять величины и направленія напряженій, дѣйствующихъ на площадки, проведенныя черезъ эту точку. Каждый радіусъ векторъ этого эллипсоида изображаетъ величину и направленіе напряженія, дѣйствующаго на единицу площади нѣкоторой площадки, проведенной черезъ центръ  $M$  эллипсоида. Этотъ эллипсоидъ называется *эллипсоидомъ напряженій* рассматриваемой точки  $M$  тѣла.

Чтобы получить уравненіе эллипсоида напряженій при расположеніи осей координатъ не параллельно направленіямъ главныхъ напряженій, должно рѣшить уравненія (14 bis) относительно  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  и полученные выраженія подставить въ равенство  $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ .

### § 30. Поверхность направленій.

Если желаемъ знать, на какую именно площадку дѣйствуетъ напряженіе, имѣющее величину и направленіе выбраннаго нами радіуса вектора  $F_n$  эллипсоида напряженій, то должны будемъ обратиться къ равенствамъ (14 bis) или же къ равенствамъ (120); изъ послѣднихъ:

$$\cos(n, n_1) = \frac{X_n}{\Gamma_1}, \quad \cos(n, n_2) = \frac{Y_n}{\Gamma_2}, \quad \cos(n, n_3) = \frac{Z_n}{\Gamma_3}; \dots \dots (120, bis)$$

умноживъ первое изъ этихъ равенствъ на  $X_n$ , второе — на  $Y_n$ , третье — на  $Z_n$  и сложивъ, получимъ:

$$F_n \cos(F_n, n) = \frac{X_n^2}{\Gamma_1} + \frac{Y_n^2}{\Gamma_2} + \frac{Z_n^2}{\Gamma_3} \dots \dots \dots (122)$$

Надо замѣтить, что проэкція напряженія  $F_n$  на нормаль  $n$  къ той площадкѣ, на которую оно дѣйствуетъ, можетъ быть для однихъ площадокъ положительною, а для другихъ отрицательною, т. е. уголъ  $(F_n, n)$  можетъ быть острымъ или тупымъ; напомнимъ, если всѣ три главные напряженія  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  отрицательныя, то для всякихъ направленій  $F_n$  уголъ  $(F_n, n)$  будетъ тупымъ, какъ видно изъ формулы (122), если же одно изъ главныхъ напряженій, напр.  $\Gamma_1$ , положительное, а два другія отрицательныя, то для нѣкоторыхъ направленій  $F_n \cos(F_n, n)$  будетъ величина положительная, а для прочихъ — отрицательная.

Для тѣхъ направленій  $F_n$ , для которыхъ  $\cos(F_n, n)$  есть величина положительная, назовемъ черезъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  слѣдующія отношенія:

$$x = \frac{X_n}{\sqrt{F_n \cos(F_n, n)}}, \quad y = \frac{Y_n}{\sqrt{F_n \cos(F_n, n)}}, \quad z = \frac{Z_n}{\sqrt{F_n \cos(F_n, n)}}; \dots (123)$$



будутъ проэкціи на направленія  $n_1, n_2, n_3$  длины  $r$ , отложенной отъ  $M$  по направлению  $F_n$ ; концы всѣхъ такихъ длинъ образуютъ собою поверхность втораго порядка, выражаемую уравненіемъ:

$$1 = \frac{x^2}{\Gamma_1^2} + \frac{y^2}{\Gamma_2^2} + \frac{z^2}{\Gamma_3^2} \dots \dots \dots (124)$$

По подстановленіи въ равенство (121), вмѣсто  $X_n, Y_n, Z_n$ , ихъ выраженій въ  $x, y, z$  изъ (123) получимъ:

$$F_n \cos (F_n, n) = \frac{1}{\frac{x^2}{\Gamma_1^2} + \frac{y^2}{\Gamma_2^2} + \frac{z^2}{\Gamma_3^2}}$$

Поэтому первое изъ равенствъ (120, bis) можно преобразовать такъ:

$$\cos (n, n_1) = \frac{x}{\Gamma_1} \sqrt{F_n \cos (F_n, n)} = \frac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{\Gamma_1^2} + \frac{y^2}{\Gamma_2^2} + \frac{z^2}{\Gamma_3^2}}}, \dots (125, a)$$

$\cos (n, n_1)$  равенъ косинусу угла, составляемаго съ направленіемъ  $n_1$  нормалью къ поверхности (124), проведенною изъ точки  $x, y, z$ , т. е. изъ конца  $r$ . Подобнымъ же образомъ окажется, что и  $\cos (n, n_2), \cos (n, n_3)$  равны косинусамъ угловъ, составляемыхъ тою же нормалью съ направленіями  $n_2, n_3$ .

Для тѣхъ направленій  $F_n$ , для которыхъ  $\cos (F_n, n)$  есть величина отрицательная назовемъ черезъ  $x, y, z$  отношенія:

$$x = \frac{X_n}{F_n \cos (F_n, n)}, \quad y = \frac{Y_n}{F_n \cos (F_n, n)}, \quad z = \frac{Z_n}{F_n \cos (F_n, n)}, \dots (123, bis)$$

они будутъ выражать проэкціи на направленія  $n_1, n_2, n_3$  длины  $r_1$ , направленной отъ концы всѣхъ длинъ  $r_1$  образуютъ поверхность втораго порядка, выражаемую уравненіемъ:

$$-1 = \frac{x^2}{\Gamma_1^2} + \frac{y^2}{\Gamma_2^2} + \frac{z^2}{\Gamma_3^2} \dots \dots \dots (124, bis)$$

По подстановленіи выраженій для  $X_n, Y_n, Z_n$  изъ равенствъ (123, bis) въ равенство (121) и (120, bis) найдемъ опять, что

$$\cos (n, n_1) = \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \cos (n, n_2) = \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \cos (n, n_3) = \frac{1}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\Delta f = + \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}, \quad f = \frac{x^2}{\Gamma_1^2} + \frac{y^2}{\Gamma_2^2} + \frac{z^2}{\Gamma_3^2} + 1.$$

это направленіе  $n$  параллельно нормали, проведенной изъ конца радіуса вектора къ поверхности (124, bis).

Изъ этого видно, что съ помощью поверхности (124) или (124, bis) могутъ быть найдены направленія нормалей къ тѣмъ площадкамъ, на которыя дѣйствуютъ на-

пряженія изображаемых радіусами векторами эллипсоида упругости; поэтому поверхности эти называются *поверхностями направлений*.

Для большей опредѣлительности рассмотрим порознь возможные видоизмѣненія поверхностей направлений.

1) Всѣ три главных напряженія положительны:

$$\Gamma_1 > \Gamma_2 > \Gamma_3 > 0.$$

Въ этихъ случаяхъ для всѣхъ направлений уголъ  $(F_n, n)$  острый. Поверхность направлений есть эллипсоидъ, полуоси котораго пропорциональны корнямъ квадратнымъ изъ главныхъ напряженій.

Пусть наружный эллипсоидъ на черт. 16 есть эллипсоидъ упругости, внутренній — поверхность направлений. Чтобы опредѣлить, на какую площадку дѣйствуетъ напряженіе  $MF$ , найдемъ точку  $K$  пересѣченія радіуса  $MF$  съ внутреннимъ эллипсоидомъ, проведемъ къ послѣднему въ точкѣ  $K$  касательную плоскость и черезъ  $M$  ей параллельную площадку; восстановимъ изъ  $M$  нормаль  $n$ , составляющую острый уголъ съ направлениемъ  $MF$ . Площадка, найденная такимъ образомъ, будетъ та, на которую будетъ дѣйствовать *натяженіе*  $MF$ , составляющее острый уголъ съ нормалью  $n$ .

Обратно, если требуется опредѣлить величину и направленіе напряженія, дѣйствующаго на единицу поверхности данной площадки, то надо провести касательную плоскость къ эллипсоиду направлений параллельную площадкѣ и приложъ съ той стороны, куда направлена нормаль  $n$ , затѣмъ надо провести радіусъ векторъ  $MF$  эллипсоида напряженій черезъ точку прикосновенія  $K$  касательной плоскости. Искомое напряженіе будетъ  $MF$ .

2) Когда всѣ три главных напряженія отрицательны:

$$0 > \Gamma_1 > \Gamma_2 > \Gamma_3,$$

то для всѣхъ направлений  $n$  уголъ  $(F_n, n)$  тупой, такъ что на всѣ площадки дѣйствуютъ *давленія*. Поверхность направлений въ этихъ случаяхъ есть эллипсоидъ, выражаемый уравненіемъ:

$$\frac{x^2}{\Gamma_1} + \frac{y^2}{(-\Gamma_2)} + \frac{z^2}{(-\Gamma_3)} = 1.$$

Построенія — тѣже самыя какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, но нормали  $n$  составляютъ тупые углы съ направленіями  $F_n$ .

3) Одно изъ главныхъ напряженій, а именно  $\Gamma_1$ , отрицательное, два прочія положительные ( $\Gamma_1 > \Gamma_2 > 0$ ).

Въ этомъ случаѣ поверхность (124) есть однополый гиперboloидъ съ дѣйствительными полуосями:  $\sqrt{\Gamma_1}$ ,  $\sqrt{\Gamma_2}$  и непересѣкающею полуосью:  $\sqrt{-\Gamma_3}$ ; уравненіе его:

$$\frac{x^2}{\Gamma_1} + \frac{y^2}{\Gamma_2} - \frac{z^2}{-\Gamma_3} = 1 \dots \dots \dots (A)$$

Поверхность же (124 bis) есть гиперboloидъ о двухъ полахъ, уравненіе котораго

$$-\frac{x^2}{\Gamma_1} - \frac{y^2}{\Gamma_2} - \frac{z^2}{\Gamma_3} = 1 \dots \dots \dots (B)$$

Эти гиперboloиды имѣютъ общій ассимптотическій конусъ:

$$\frac{x^2}{\Gamma_1} + \frac{y^2}{\Gamma_2} = \frac{z^2}{(-\Gamma_3)} \dots\dots\dots (C)$$

Чтобы опредѣлить площадку, на которую дѣйствуетъ напряженіе  $MF$  (черт. 17), это найти точку  $K$  пересѣченія этого радіуса вектора  $MF$  съ поверхностью направленій, провести касательную плоскость къ поверхности въ точкѣ  $K$  и черезъ точку  $M$  площадку параллельную этой плоскости. Если точка  $K$  окажется на однополомъ гиперboloидѣ, нормаль  $n$  будетъ составлять острый уголъ съ направлениемъ  $MF$ ; если точка  $K$  окажется на гиперboloидѣ о двухъ полахъ, то нормаль  $n$  должна составлять тупой уголъ съ направлениемъ  $MF$ . Если же направленіе  $MF$  будетъ лежать въ ассимптотическомъ конусѣ, то площадка будетъ совпадать съ касательною плоскостью, проведенною къ конусу черезъ производимую  $MF$  и напряженіе, дѣйствующее на такую площадку, будетъ тангенциально къ ней и равно  $MF$  на единицу площади. По этой причинѣ ассимптотическій конусъ называется *конусомъ тангенциальныхъ напряженій*.

4) Если два главные напряженія отрицательны, а третье положительно:

$$\Gamma_1 > 0 > \Gamma_2 > \Gamma_3,$$

то часть поверхности направленій, которая опредѣляетъ направленія нормалей къ площадкамъ испытывающимъ натяженія, есть гиперboloидъ о двухъ полахъ:

$$\frac{x^2}{\Gamma_1} - \frac{y^2}{\Gamma_2} - \frac{z^2}{\Gamma_3} = 1, \dots\dots\dots (A)$$

а часть поверхности направленій, которая опредѣляетъ направленія площадокъ, испытывающихъ давленія, есть гиперboloидъ однополой:

$$\frac{y^2}{\Gamma_2} + \frac{z^2}{\Gamma_3} - \frac{x^2}{\Gamma_1} = 1, \dots\dots\dots (B)$$

Въ первомъ случаѣ, площадки, испытывающія только тангенциальныя напряженія, касательны къ ассимптотическому конусу:

$$\frac{y^2}{\Gamma_2} + \frac{z^2}{(-\Gamma_3)} = \frac{x^2}{\Gamma_1} \dots\dots\dots (C)$$

### § 31. Случай, въ которыхъ одно или два изъ главныхъ напряженій равны нулю.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда равно нулю одно изъ главныхъ напряженій, означимъ остальные два напряженія черезъ  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  и возьмемъ новую ось  $X$ -овъ по направленію перпендикулярному къ площадке испытывающей напряженіе  $\Gamma_1$ , а новую ось  $Y$ -овъ по направленію перпендикулярному къ площадке испытывающей напряженіе  $\Gamma_2$ .

Равенства (120) въ такихъ случаяхъ будутъ имѣть такой видъ:

$$\left. \begin{aligned} F_n \cos (F_n, n) &= X_n = \Gamma_1 \lambda, \\ F_n \cos (F_n, n) &= Y_n = \Gamma_2 \mu, \\ F_n \cos (F_n, n) &= Z_n = 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (126)$$

потому что  $\Gamma_3 = 0$ . Следовательно напряженія, испытываемыя всякими площадками, направлены въ плоскости  $XU$ , площадки же, совпадающія съ этою плоскостью, не испытываютъ напряженій вовсе.

Означимъ черезъ  $\gamma$  уголъ, составляемый направлениемъ нормали  $n$  съ осью  $Z$ -овъ, перпендикулярною къ направлениамъ главныхъ напряженій  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Такъ какъ  $\lambda^2 + \mu^2 = \sin^2 \gamma$ , то изъ равенствъ (126) можно получить слѣдующее уравненіе:

$$\frac{X_n^2}{\Gamma_1^2 \sin^2 \gamma} + \frac{Y_n^2}{\Gamma_2^2 \sin^2 \gamma} = 1 \dots \dots \dots (127)$$

эллипса, радіусы векторы котораго представляютъ величины и направленія напряженій  $F_n$ , испытываемыхъ площадками, нормали которыхъ составляютъ уголъ  $\gamma$  съ осью  $Z$ -овъ. Для каждой величины угла  $\gamma$  есть свой эллипсъ, полюсы котораго равны  $\Gamma_1 \sin \gamma$  и  $\Gamma_2 \sin \gamma$ ; всѣ эллипсы подобны другъ другу и наибольшій, соответствующій углу  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , выражается уравненіемъ

$$\frac{X_n^2}{\Gamma_1^2} + \frac{Y_n^2}{\Gamma_2^2} = 1 \dots \dots \dots (127, a)$$

Каждый такой эллипсъ есть *эллипсъ напряженій*.

Изъ равенствъ (126) составимъ выраженіе проекции напряженія  $F_n$  на нормаль  $n$ .

$$F_n \cos (F_n, n) = \frac{X_n^2}{\Gamma_1} + \frac{Y_n^2}{\Gamma_2} \dots \dots \dots (128)$$

Изъ этого выраженія видно, что, если  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  положительны, то всякое напряженіе  $F_n$  составляетъ острый уголъ съ нормалью къ той площадкѣ, на которую оно дѣйствуетъ, если же оба они отрицательны, то для всякаго направленія  $n$  уголъ  $(F_n, n)$  — тупой; наконецъ, если  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  имѣютъ противоположные знаки, то для однихъ направлений  $n$  уголъ  $(F_n, n)$  острый, для другихъ — тупой.

Величины:

$$x = \frac{X_n}{\sqrt{\pm F_n \cos (F_n, n)}}, \quad y = \frac{Y_n}{\sqrt{\pm F_n \cos (F_n, n)}}, \dots \dots \dots (129)$$

(гдѣ знакъ плюсъ долженъ быть взятъ для направлений  $n$ , при которыхъ  $\cos (F_n, n)$  положительный), суть координаты концовъ радіусовъ векторовъ, направленныхъ вдоль по  $MF_n$ ; концы этихъ радіусовъ векторовъ образуютъ собою кривую втораго порядка, которая есть эллипсъ:

$$\frac{x^2}{\Gamma_1} + \frac{y^2}{\Gamma_2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{(-\Gamma_1)} + \frac{y^2}{(-\Gamma_2)} = 1,$$

если главные напряженія имѣютъ одинаковые знаки; если же знаки ихъ противоположны, то кривая состоитъ изъ двухъ гиперболъ:

$$\frac{x^2}{\Gamma_1} - \frac{y^2}{(-\Gamma_2)} = 1 \dots \dots \dots (A) \quad \frac{y^2}{\Gamma_2} - \frac{x^2}{\Gamma_1} = 1, \dots \dots \dots (B)$$



связующих общія асимптоты:

$$x = \pm y \sqrt{-\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}} \dots \dots \dots (C)$$

Эти кривыя вмѣстѣ съ эллипсами напряженій могутъ служить для опредѣленія положеній площадокъ, испытывающихъ данныя напряжения и для опредѣленія напряженій, испытываемыхъ данными площадками; поэтому кривыя эти могутъ быть названы *кривыми направленій*.

Исключивъ изъ формулъ (126), (127) и (129) величины  $X_n$  и  $Y_n$ , получимъ:

$$\begin{aligned} \pm F_n \cos (F_n, n) &= \frac{1}{\sin^2 \gamma} \left( \frac{x^2}{\Gamma_1^2} + \frac{y^2}{\Gamma_2^2} \right), \\ \lambda = \cos (n, X) &= \frac{x}{\Gamma_1} \sqrt{\pm F_n \cos (F_n, n)} = \sin \gamma \cos (\mathfrak{N}, X), \\ \mu = \cos (n, Y) &= \frac{y}{\Gamma_2} \sqrt{\pm F_n \cos (F_n, n)} = \sin \gamma \cos (\mathfrak{N}, Y), \end{aligned} \quad \dots (130)$$

т. е.  $\mathfrak{N}$  есть направленіе нормали, возстановленной къ кривой направленій изъ той точки, въ которой она пересѣкается радіусомъ векторомъ  $MF_n$  эллипса напряженій.

Изъ равенствъ (130) слѣдуетъ, что направленіе  $\mathfrak{N}$  параллельно той линіи, по которой плоскость  $XU$  (главныхъ напряженій  $\Gamma_1, \Gamma_2$ ) пересѣкается плоскостью, проведенною черезъ нормаль  $n$  и черезъ ось  $Z$ -овъ. Стало быть слѣды площадки на плоскости  $XU$  должны совпадать съ диаметромъ кривой положеній, сопряженнымъ съ тѣмъ диаметромъ, по которому направлено напряжение  $MF_n$ , испытываемое площадкою.

Пусть плоскость бумаги на чертежѣ 18-мъ будетъ плоскостью главныхъ напряженій  $\Gamma_1, \Gamma_2$  въ точкѣ  $M$ . Наружный эллипсъ пусть представляетъ эллипсъ напряженій (127, а); внутренний эллипсъ пусть будетъ кривою направленій (предполагая знаки напряженій  $\Gamma_1, \Gamma_2$  одинаковыми). Чтобы опредѣлить положеніе площадки, испытывающей напряженіе  $MF_n$ , найдемъ точку  $K$  пересѣченія этого направленія съ эллипсомъ напряженій, проведемъ въ этой точкѣ касательную къ нему и черезъ  $M$  прямую  $SS'$  параллельную; эта прямая и будетъ слѣдомъ искомой площадки на плоскости  $XU$ .

Нормаль къ площадке будетъ конечно заключаться въ плоскости, проходящей черезъ ось  $Z$ -овъ и прямую  $\mathfrak{N}$ , она будетъ составлять съ  $\mathfrak{N}$  уголъ острый, если  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  положительныя, въ противномъ же случаѣ — тупой; уголъ, составляемый нормалью съ осью  $Z$ -овъ опредѣлится тѣмъ, что синусъ его будетъ равенъ отношенію  $MF_n$  къ  $MF'_n$ . Конечно, найдутся двѣ такіа площадки, одинаково наклоненныя къ прямой  $\mathfrak{N}$  и составляющія взаимно дополнительные до  $\pi$  углы съ положительною осью  $Z$ -овъ, которыя испытываютъ одно и то же напряженіе  $MF_n$ .

Пусть изображенныя на чертежѣ 19-мъ гиперболы суть кривыя направленій при положительномъ  $\Gamma_1$  и отрицательномъ  $\Gamma_2$ , а изображенный здѣсь эллипсъ — эллипсъ напряженій (127, а).

Въ этомъ случаѣ нормаль  $n$  будетъ составлять острый уголъ съ направленіемъ  $\mathfrak{N}$  изъ тѣхъ направленій  $F_n$ , которыя пересѣкаютъ гиперболу (А), пересѣкающую ось  $Z$ -овъ; если же направленіе  $F_n$  пересѣкаетъ гиперболу (В), какъ представлено на чертежѣ 20-мъ, то нормаль  $n$  будетъ составлять тупой уголъ съ направленіемъ  $\mathfrak{N}$ , такъ какъ она должна тогда составлять тупой уголъ съ направленіемъ напряженія  $MF_n$ , которое испытываетъ площадка.

На чертежѣ 21-мъ представленъ одинъ изъ тѣхъ случаевъ, въ которыхъ напряженіе  $MF$  находится на асимптотѣ, тогда точка  $K$  находится на безконечности по направлению означенному оперенною стрѣлкою и сама асимптота служи́тъ слѣдомъ площадки. Въ этомъ случаѣ нормаль  $n$  составляетъ съ направлениемъ  $M$ , изображеннымъ на чертежѣ, острый уголъ; это видно изъ слѣдующаго соображенія: пока точка  $K$  находится на гиперболѣ  $A$ , нормаль  $n$  составляетъ острый уголъ съ направлениемъ  $МК$ , а слѣдовательно и съ направлениемъ  $M$ , поэтому  $n$  должна будетъ составлять острый уголъ съ  $M$  и тогда, когда точка  $K$  удалится по правой вѣтви гиперболы  $A$  въ безконечность по направлению оперенной стрѣлки.

Если два главныхъ напряжения равны нулю и мы направимъ ось  $X$ -овъ по направлению  $\Gamma_1$ , неравному нулю, то формулы (120) дадутъ слѣдующее:

$$F_n \cos (F_n, X) = X_n - \Gamma_1 \cos (n, X), \quad F_n \cos (F_n, Y) = 0, \quad F_n \cos (F_n, Z) = 0;$$

это значить, что тогда на каждую площадку дѣйствуетъ напряженіе параллельно оси  $X$ -овъ равное проекціи  $\Gamma_1$  на нормаль; притомъ можно еще замѣтить, что

$$F_n \cos (F_n, n) = \Gamma_1 \cos^2 (n, X).$$

## VI.

### Зависимость между напряжениями и деформациями.

**§ 32. Выраженія проекцій напряженій въ видѣ суммъ, распространенныхъ на всѣ частицы, окружающія ту точку тѣла, черезъ которую проведена площадка.**

Въ §§ 4-мъ, 5-мъ и 6-мъ было уже объяснено, что понимаютъ подъ именемъ проекцій  $X_n$ ,  $Y_n$ ,  $Z_n$  на оси координатъ напряжения  $F_n$ , дѣйствующаго въ точкѣ  $M$  на единицу поверхности площадки  $\Delta S$ , проведенной черезъ эту точку и имѣющей нормалью направленіе  $n$ .

Вудемъ теперь составлять выраженіе для  $X_n$ .

Возьмемъ двѣ частицы вблизи площадки  $\Delta S$ , одну  $\mu$  со стороны положительной нормали  $n$ , другую  $m$  — со стороны противоположной; эти частицы должны быть изъ числа тѣхъ, которыя расположены относительно одна другой въ разстояніи не болѣе  $\rho$  радіуса сферы дѣйствія частичныхъ силъ, а относительно площадки онѣ должны быть расположены такъ, чтобы кратчайшее разстояніе между ними пересѣкало площадь или контуръ площадки.

Означимъ черезъ  $r$  величину разстоянія между  $m$  и  $\mu$  и выѣсть съ тѣмъ напряженіе отъ  $m$  къ  $\mu$ ; такъ какъ частичная сила дѣйствія  $\mu$  на  $m$  предполагается равною  $m \mu \phi(r)$ , гдѣ  $\phi(r)$  есть положительная величина въ томъ случаѣ, когда

взаимодѣйствіе между  $\mu$  и  $m$  есть отталкиваніе, то проеція на ось  $X$ -овъ частичнаго дѣйствія частицы  $\mu$  на частицу  $m$  выразится величиною:

$$[-m\mu\varphi(r) \cos(r, X)].$$

Соберемъ теперь сумму проецій на ось  $X$ -овъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ сквозь площадку  $\Delta S$  со стороны всѣхъ такихъ частицъ  $\mu$ , на такія частицы  $m$ , разстоянія  $\mu$  между которыми имѣютъ одну и ту же величину  $r$  и параллельны между собою.

На чертежѣ 21-мъ представлено нѣсколько паръ такихъ частицъ, а именно:  $\mu_1, m_1, \mu_2, m_2$  и наконецъ  $m_0, \mu_0$ , изъ этихъ частицъ одна:  $m_0$  находится въ точкѣ  $M$ .

Всѣ такія частицы  $m$ , какъ  $m_0, m_1, m_2, \dots$  и прочія, заполняютъ собою пространство на чертежѣ цилиндръ, основаніе котораго есть площадка  $\Delta S$  и боковая поверхность образуется длинами равными и параллельными длинѣ  $M\mu$ , т. е.  $r$ .

Сумма проецій на ось  $X$ -овъ частичныхъ дѣйствій со стороны всѣхъ частицъ  $\mu_1, \mu_2, \dots$  на всѣ частицы  $m_0, m_1, m_2, \dots$  будетъ равна:

$$-(\sum m\mu) \varphi(r) \cos(r, X),$$

знакъ суммы относится ко всѣмъ частицамъ  $m$ , заполняющимъ вышесказанный цилиндръ, и къ соответствующимъ имъ частицамъ  $\mu$ .

Если бы массы всѣхъ частицъ  $\mu$  были одинаковы, то  $\mu$  можно было бы взять за дѣль суммы; но даже если массы  $\mu$  равно какъ и массы  $m$ , неодинаковы между собою, все-таки можно въ вышеприведенной суммѣ произведеній  $m\mu$  вынести за знакъ суммы нѣкоторое среднее значеніе изъ массъ всѣхъ частицъ, окружающихъ точку  $M$ ; возьмемъ эту среднюю величину массы частицы бубовою  $m$ ; тогда:

$$\sum m\mu = m\sum m,$$

гдѣ  $\sum m$  выражаетъ массу вещества, заключающагося въ вышесказанномъ цилиндрѣ.

Означимъ черезъ  $\sigma$  среднюю плотность цилиндра, за которую примемъ плотность вещества въ точкѣ  $M$ ; масса цилиндра равна  $\sigma$  помноженной на объемъ цилиндра, т. е. на  $\Delta S \cdot r \cos(r, n)$ , такъ какъ величина высоты цилиндра равна проеція длины  $M\mu$  на направленіе  $n$ .

И такъ, составленная теперь сумма выразится слѣдующимъ образомъ:

$$-m\sigma \Delta S \varphi(r) r \cos(r, n) \cos(r, X) \dots \dots \dots (131)$$

Далѣе, предполагая, что точка  $M$  находится на разстояніи не менѣе  $\rho$  отъ поверхности тѣла, должно суммировать выраженіе (131) по всѣмъ величинамъ  $r$ , т. е. отъ  $r=0$  до  $r=\rho$ , и по всѣмъ направленіямъ  $r$ , составляющимъ съ  $n$  углы не большіе прямиго.

Означимъ черезъ  $\theta$  уголъ, составляемый направленіемъ  $r$  съ направленіемъ  $n$  и черезъ  $\phi$  уголъ, составляемый плоскостью, проведенною черезъ  $r$  и  $n$ , съ нѣкоторою другою плоскостью, тоже проведенною черезъ  $n$ .

При суммировании по всемъ направлениямъ  $r$ , составляющимъ съ  $n$  углы не большіе прямого, надо будетъ суммировать по всемъ  $\vartheta$ , заключающимся въ предѣлахъ отъ  $\vartheta = 0$  до  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , и по всемъ  $\psi$ , отъ  $\psi = 0$  до  $\psi = 2\pi$ .

Замѣтивъ же, что въ выраженіи (131) произведеніе  $\cos(r, n) \cos(r, X)$  не измѣняетъ своей величины при переѣмѣ направленія  $r$  въ направленіе противоположное, можемъ вмѣсто этого просуммировать по всемъ возможнымъ направленіямъ  $r$  (т. е. по  $\vartheta$  отъ  $\vartheta = 0$  до  $\vartheta = \pi$  и по  $\psi$  отъ  $\psi = 0$  до  $\psi = 2\pi$ ) и взять половину полученной суммы.

Такимъ образомъ получится слѣдующее выраженіе для числителя перваго изъ отношеній (2) § 4-го:

$$\Sigma X = -\Delta S \frac{\sigma}{2} \sum \sin \varphi(r) r \cos(r, n) \cos(r, X),$$

гдѣ  $\sum$  означаетъ суммирование по всемъ  $r$  отъ 0 до  $\varrho$ , по всемъ  $\vartheta$  отъ 0 до  $\pi$  и по всемъ  $\psi$  отъ 0 до  $2\pi$ ; средняя масса  $m$  оставлена подъ знакомъ суммы, такъ какъ величина ея можетъ быть различна по различнымъ направленіямъ и въ различныхъ разстояніяхъ отъ площадки.

Раздѣливъ полученное выраженіе  $\Sigma X$  на  $\Delta S$ , получимъ слѣдующее выраженіе для  $X_n$ :

$$X_n = -\frac{\sigma}{2} \sum \sin \varphi(r) r \cos(r, n) \cos(r, X) \dots \dots \dots (132. a)$$

и подобнымъ же образомъ составимъ выраженія для  $Y_n$  и  $Z_n$ :

$$Y_n = -\frac{\sigma}{2} \sum \sin \varphi(r) r \cos(r, n) \cos(r, Y) \dots \dots \dots (132. b)$$

$$Z_n = -\frac{\sigma}{2} \sum \sin \varphi(r) r \cos(r, n) \cos(r, Z) \dots \dots \dots (132. c)$$

Если дать  $n$  направленіе положительной оси  $X$ -овъ, положительной оси  $Y$ -овъ или положительной оси  $Z$ -овъ, то получимъ изъ этихъ формулъ слѣдующія выраженія для проэкцій напряженій, дѣйствующихъ въ точкѣ  $M$  на площадке, перпендикулярныя къ направленіямъ положительныхъ осей координатъ:

$$N_1 = -\frac{\sigma}{2} \sum \sin \varphi(r) r \cos^2(r, X), \dots \dots \dots (133. a)$$

и подобныя же выраженія для  $N_2$  и  $N_3$ , отличающіяся отъ (133, a) только тѣмъ, что въ нихъ входятъ квадраты косинусовъ угловъ, составляемыхъ направленіями  $r$  съ осями  $Y$ -овъ и  $Z$ -овъ, вмѣсто  $\cos^2(r, X)$ .

Далѣе:

$$T_{yz} = T_1 = -\frac{\sigma}{2} \sum \sin \varphi(r) r \cos(r, Y) \cos(r, Z) \dots \dots \dots (134. a)$$

и подобныя же выраженія для  $T_{zx} = T_2$ ,  $T_{xy} = T_3$ , отличающіяся отъ (134, a) соотвѣтственною перестановкою буквъ:  $X, Y, Z$ .



Считаемъ необходимымъ обратить здѣсь вниманіе на слѣдующее обстоятельство:

При составленіи выраженій (133), (134) предполагалось, что всѣ точки площадки отстоятъ отъ поверхности тѣла на разстояніи не менѣемъ радіуса  $\rho$  сферы дѣйствія частичныхъ силъ, а потому составленныя формулы выражаютъ проэкции напряженій только въ такихъ точкахъ внутри тѣла, которыя отстоятъ отъ поверхности на разстояніи не менѣемъ величины  $\rho$ .

### § 33. Состояніе упругаго тѣла до деформированія. Предварительныя напряженія.

Мы будемъ предполагать, что физически-твердое тѣло до наступленія деформаций было подвержено никакимъ вѣншимъ силамъ и напряжениямъ и находилось, либо покоѣ, либо въ поступательномъ движеніи по инерціи; такое состояніе физически-твердаго тѣла я буду называть *предварительнымъ состояніемъ*.

Отнесемъ тѣло къ осямъ координатъ  $X, Y, Z$ , неподвижнымъ, если предварительное состояніе тѣла есть состояніе покоя, и поступательно-движущимся вмѣстѣ съ цѣнромъ тяжести тѣла, если предварительное состояніе его есть поступательное движеніе по инерціи. Пусть  $x, y, z$  суть координаты предварительныхъ положеній точекъ тѣла относительно этихъ осей.

Пока тѣло находится въ предварительномъ состояніи и ни температура, ни строеніе не измѣняются, величины напряженій  $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$  остаются неизмѣнными въ каждой точкѣ тѣла; для отличія этихъ напряженій отъ тѣхъ, которыя являются при деформированномъ состояніи тѣла, я буду ихъ называть *предварительными напряженіями* и буду обозначать такъ:  $N_1^0, N_2^0, N_3^0, T_1^0, T_2^0, T_3^0$ .

Величины предварительныхъ напряженій въ точкахъ твердаго тѣла, не находящагося въ поверхностномъ слое, могутъ быть выражены формулами (133) и (134); но, пока мы не знаемъ вида функцій  $\phi, \psi$  и не составили себѣ никакого представленія о распредѣленіи частицъ тѣла, эти формулы не могутъ служить для вычисленія величинъ предварительныхъ напряженій въ различныхъ точкахъ тѣла. Эти формулы (133) и (134) составлены и приведены здѣсь для другой цѣли, какъ будетъ видно въ слѣдующемъ параграфѣ.

Для величинъ предварительныхъ напряженій въ точкахъ поверхностнаго слоя, въ такихъ, которыя отстоятъ отъ поверхности тѣла менѣе чѣмъ на  $\rho$  (величину радіуса сферы дѣйствія частичныхъ силъ), мы не имѣемъ даже и такихъ выраженій, какъ (133) и (134).

Во всякомъ случаѣ изъ уравненій (17) § 11-го слѣдуетъ, что предварительныя напряженія должны быть такими функціями отъ  $x, y, z$ , которыя удовлетворяли бы дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1^0}{\partial x} + \frac{\partial T_2^0}{\partial y} + \frac{\partial T_3^0}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial T_1^0}{\partial x} + \frac{\partial N_2^0}{\partial y} + \frac{\partial T_3^0}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial T_2^0}{\partial x} + \frac{\partial T_1^0}{\partial y} + \frac{\partial N_3^0}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}; \dots\dots\dots (135)$$

величины же проекцій предварительныхъ напругъ  $X_n^0, Y_n^0, Z_n^0$  на какую либо площадку, проведенную через одну изъ такихъ точекъ тѣла, выражаются по формуламъ (14 bis) § 28-го въ величинахъ предварительныхъ напряженій  $N_1^0, N_2^0, N_3^0, T_1^0, T_2^0, T_3^0$  для той же точки, такъ что:

$$\left. \begin{aligned} X_n^0 &= N_1^0 \cos (n, X) + T_1^0 \cos (n, Y) + T_2^0 \cos (n, Z) \\ Y_n^0 &= T_1^0 \cos (n, X) + N_2^0 \cos (n, Y) + T_2^0 \cos (n, Z) \\ Z_n^0 &= T_2^0 \cos (n, X) + T_1^0 \cos (n, Y) + N_3^0 \cos (n, Z) \end{aligned} \right\} \dots (136)$$

§ 34. Выраженія напряженій въ деформированномъ состояніи твердаго тѣла при предположеніи, что относительныя перемѣщенія сосѣднихъ точекъ тѣла ничтожно-малы сравнительно съ ихъ предварительными взаимными разстояніями.

Твердое тѣло, находящееся въ *предварительномъ состояніи*, при дѣйствіи вѣншихъ напряженій или вѣншихъ объемныхъ силъ деформируется, такъ что первоначальныя координаты  $x, y, z$  точекъ его получаютъ приращенія  $u, v, w$ , которыя суть нѣкоторыя функции первоначальныхъ координатъ  $x, y, z$ .

Пока тѣло деформируется, приращенія координатъ  $u, v, w$  суть не только функций первоначальныхъ координатъ, но и еще явныя функции времени  $t$ .

Относительно величинъ  $u, v, w$  мы можемъ предположить, что это суть *сплошныя функции координатъ  $x, y, z$  для одного и того же тѣла*, потому что если  $u, v, w$  претерпѣваютъ разрывъ сплошности на какой либо поверхности, проведенной внутри тѣла и раздѣляющей его на двѣ части, то мы вправѣ разсматривать эти двѣ части, какъ два разныя тѣла.

Пусть  $M$  и  $M_1$  суть двѣ весьма близкія одна къ другой точки тѣла; предварительныя координаты первой:  $x, y, z$ , второй:  $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ . Въ деформированномъ состояніи координаты положенія  $M'$ , занимаемаго первою точкою, будутъ  $x + u, y + v, z + w$ , координаты же положенія  $M'_1$ , занимаемаго въ тотъ же моментъ второю точкою, будутъ:  $x + \Delta x + u + \Delta u, y + \Delta y + v + \Delta v, z + \Delta z + w + \Delta w$ .

Такъ какъ  $u, v, w$  суть сплошныя функции координатъ  $x, y, z$ , то  $\Delta u, \Delta v, \Delta w$  могутъ быть выражены въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ величинъ  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{\partial u}{\partial z} z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} x^2 + \dots \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} x + \frac{\partial v}{\partial y} y + \frac{\partial v}{\partial z} z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} x^2 + \dots \\ \Delta w &= \frac{\partial w}{\partial x} x + \frac{\partial w}{\partial y} y + \frac{\partial w}{\partial z} z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} x^2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots (137)$$

здѣсь и въ дальнѣйшихъ формулахъ величины  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  обозначены буквами  $x, y, z$ .

Вслѣдствіе деформаций взаимное расположеніе точекъ тѣла измѣняется, а потому измѣняются и всѣ величины, входящія въ составъ выраженій (133) и (134). именно:

Въ предварительномъ  
состояніи были:

Въ деформированномъ  
состояніи будутъ:

Постояніе точки  $M$  есть  
которой либо изъ со-  
седнихъ точекъ  $M_1$ .

$$r = MM_1 \dots \dots \dots r = M'M'_1$$

$$(r^2 = x^2 + y^2 + z^2) \dots \dots (r'^2 = (x + \Delta u)^2 + (y + \Delta v)^2 + (z + \Delta w)^2)$$

Синусы угловъ съ ося-

$$\text{ми координатъ} \dots \cos(r, X) = \frac{x}{r} \dots \dots \cos(r, X) = \frac{x + \Delta u}{r}$$

$$\cos(r, Y) = \frac{y}{r} \dots \dots \cos(r, Y) = \frac{y + \Delta v}{r}$$

$$\cos(r, Z) = \frac{z}{r} \dots \dots \cos(r, Z) = \frac{z + \Delta w}{r}$$

Плотность вещества въ  
ближайшемъ сосед-  
ствѣ съ точкою  $M$ .

$$\sigma \dots \dots \sigma_1 = \frac{\sigma}{1 + \theta}$$

Здѣсь  $\theta$  означаетъ кубическое расширеніе въ точкѣ  $M$ , рассчитанное на единицу  
мѣры. Что плотность уменьшается въ отношеніи единицы къ  $(1 + \theta)$  видно изъ слѣ-  
дующаго. Пусть  $V$  и  $V_1$  суть объемы одного и того же элемента тѣла въ предва-  
рительномъ и деформированномъ состояніи, а  $\sigma$  и  $\sigma_1$  — плотности вещества элемента въ  
этихъ состояніяхъ; такъ какъ  $V\sigma = V_1\sigma_1$  и  $V_1 = V(1 + \theta)$ , то  $\sigma = \sigma_1(1 + \theta)$ .

Составленные по формуламъ (133) и (134) величины предварительныхъ напря-  
женій въ точкѣ  $M(x, y, z)$  выразятся теперь такъ:

$$\left. \begin{aligned} N_1^0 &= \frac{\sigma}{2} \sum m \frac{\varphi(r)}{r} x^2, & T_1^0 &= \frac{\sigma}{2} \sum m \frac{\varphi(r)}{r} yz \\ N_2^0 &= \frac{\sigma}{2} \sum m \frac{\varphi(r)}{r} y^2, & T_2^0 &= \frac{\sigma}{2} \sum m \frac{\varphi(r)}{r} zx \\ N_3^0 &= \frac{\sigma}{2} \sum m \frac{\varphi(r)}{r} z^2, & T_3^0 &= \frac{\sigma}{2} \sum m \frac{\varphi(r)}{r} xy \end{aligned} \right\} \dots \dots (138)$$

Величины же напряженій въ точкѣ  $M'(x + u, y + v, z + w)$  въ деформиро-  
ванномъ состояніи тѣла выразятся такъ:

$$N_1 = \frac{\sigma}{2(1 + \theta)} \sum m \frac{\varphi(r)}{r} (x + \Delta u)^2 \dots \dots \dots (139, a)$$

$$N_2 = \frac{\sigma}{2(1 + \theta)} \sum m \frac{\varphi(r)}{r} (y + \Delta v)^2 \dots \dots \dots (139, b)$$

$$N_3 = \frac{\sigma}{2(1 + \theta)} \sum m \frac{\varphi(r)}{r} (z + \Delta w)^2 \dots \dots \dots (139, c)$$

$$T_1 = \frac{\sigma}{2(1 + \theta)} \sum m \frac{\varphi(r)}{r} (y + \Delta v)(z + \Delta w) \dots \dots \dots (139, d)$$

$$T_2 = \frac{\sigma}{2(1 + \theta)} \sum m \frac{\varphi(r)}{r} (z + \Delta w)(x + \Delta u) \dots \dots \dots (139, e)$$

$$T_3 = \frac{\sigma}{2(1 + \theta)} \sum m \frac{\varphi(r)}{r} (x + \Delta u)(y + \Delta v) \dots \dots \dots (139, f)$$

Въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ мы ограничимся разсмотрѣніемъ только такихъ деформаций твердыхъ тѣлъ, при которыхъ относительныя перемѣщенія каждаго двухъ сосѣднихъ между собою точекъ тѣла настолько ничтожно-малы сравнительно съ ихъ предварительнымъ разстояніемъ, что возможно, при составленіи выраженій для  $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ , пренебречь квадратами отношеній сказанныхъ перемѣщеній къ предварительнымъ разстояніямъ.

Подъ сосѣдними между собою точками тѣла мы здѣсь подразумѣваемъ такія, сферы взаимнодѣйствія которыхъ пересѣкаются.

Подъ относительнымъ перемѣщеніемъ точки  $M$ , относительно точки  $M$  мы здѣсь подразумѣваемъ геометрическую разность между разстояніемъ  $MM_1$  въ деформированномъ состояніи и между ихъ предварительнымъ разстояніемъ  $MM_1$ ; слѣдовательно проекція на ось  $X$ -овъ относительнаго перемѣщенія точки  $M_1$  относительно точки  $M$  равна:

$$r \cos (r, X) - r \cos (r, X) = x + \Delta u - r = \Delta u$$

и проекція этого перемѣщенія на оси  $Y$ -овъ и  $Z$ -овъ равны  $\Delta v, \Delta w$ .

Изъ равенства:

$$\frac{\Delta u}{r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{y}{r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{z}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{x^2}{r} + \dots$$

видно, что для того, чтобы отношеніе  $(\Delta u : r)$  было ничтожно-малою величиною при всякихъ направленіяхъ  $r$ , необходимо, чтобы были ничтожно-малы производныя  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$  и произведенія  $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \dots$ , а для того, чтобы отношеніе это было ничтожно-мало для всякихъ  $r$ , необходимо, чтобы все производныя были ничтожно-малы.

Для того, чтобы можно было пренебрегать квадратами и высшими степенями отношеній  $(\Delta u : r), (\Delta v : r), (\Delta w : r)$  сравнительно съ ихъ первыми степенями, необходимо, чтобы все частныя производныя отъ  $u, v, w$  по  $x, y, z$  были настолько малы, чтобы можно было пренебрегать ихъ квадратами и произведеніями сравнительно съ ихъ первыми степенями.

Поэтому, сдѣланное нами ограниченіе относительно деформаций можно выразить такъ:

*Мы будемъ разсматривать только такія деформации твердыхъ тѣлъ, при которыхъ производныя*

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}$$

*и прочія производныя высшихъ порядковъ настолько малы, что при составленіи выраженій для напряженій можно пренебречь вторыми и высшими степенями этихъ производныхъ.*

Если разсматривать относительныя деформации, происходящія въ ближайшемъ сосѣдствѣ съ какою либо точкою  $M$  тѣла, а именно внутри сферы дѣйствія частныхъ силъ, описанной вокругъ центра  $M$ , то, по малости величинъ  $x, y, z$ , можно въ выраженіяхъ (137) отбросить все члены, заключающіе квадраты и высшія степени



ихъ величинъ; тогда относительная деформация внутри сказанной сферы выразится такъ:

$$\left. \begin{aligned} r + \Delta r &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{\partial u}{\partial z} z \\ v + \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} x + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) y + \frac{\partial v}{\partial z} z \\ z + \Delta z &= \frac{\partial w}{\partial x} x + \frac{\partial w}{\partial y} y + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (140)$$

При той степени малости производныхъ, при которой можно пренебрегать ихъ квадратами сравнительно съ первыми степенями, эти равенства (140) выражаютъ единую ничтожно-малую деформацию (§ 27); поэтому сдѣланное нами ограниченіе можно формулировать еще слѣдующимъ образомъ:

*Мы будемъ разсматривать только такія деформации физически-твердыхъ телъ, при которыхъ вокругъ каждой точки тѣла, въ сферѣ дѣйствія частицъ, силы исходящихъ изъ нея, совершаются относительныя деформации однородныя и ничтожно-малыя.*

Принимая во вниманіе сказанное въ § 27-мъ относительно значеній коэффициентовъ ничтожно-малыхъ однородныхъ деформаций, мы заключимъ, что частныя производныя отъ  $u$  по  $x$ , отъ  $v$  по  $y$ , отъ  $w$  по  $z$  имѣютъ значенія линейныхъ растяженій тѣла, проведенныхъ черезъ точку  $M(x, y, z)$  параллельно осямъ координатъ, т. е.:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_2, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_3, \dots\dots\dots (141)$$

Кубическое расширеніе (на единицу объема) въ точкѣ  $M$  выражается суммою:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \dots\dots\dots (142)$$

Величины двойныхъ сдвиговъ въ плоскостяхъ, проведенныхъ черезъ точку  $M$  параллельно плоскостямъ координатъ выражаются суммами:

$$2g_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2g_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2g_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \dots\dots\dots (143)$$

Эти проэкціи на оси координатъ углового перемѣщенія вещества, окружающаго точку  $M$ , выражаются слѣдующими полуразностями:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \dots\dots (144)$$

Обращаясь теперь къ преобразованію вторыхъ частей выраженій (139), причеиъ не будемъ пренебрегать вторыми и высшими степенями первыхъ частныхъ производныхъ и всѣми степенями частныхъ производныхъ второго и высшихъ порядковъ отъ  $x$  по  $x, y, z$ , сдѣлаемъ слѣдующія подготовительныя замѣчанія.

1) При сказанномъ приближеніи можно замѣнить отношеніе  $1:(1+\theta)$  разностью  $(1-\theta)$ , т. е.:

$$1 - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}, \dots \dots \dots (145)$$

а въ тѣхъ членахъ, въ которыхъ это отношеніе будетъ помножено на одну изъ частныхъ производныхъ отъ  $u, v, w$  по  $x, y, z$ , оно можетъ быть замѣнено единицею

2) Нижеслѣдующіе квадраты могутъ быть замѣнены слѣдующими суммами:

$$\left. \begin{aligned} (r + \Delta u)^2 &= r^2 \left( 1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2rv \frac{\partial u}{\partial y} + 2r^2 \frac{\partial u}{\partial z} \\ (v + \Delta v)^2 &= 2vr \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 \left( 1 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2vz \frac{\partial v}{\partial z} \\ (z + \Delta w)^2 &= 2zr \frac{\partial w}{\partial x} + 2zv \frac{\partial w}{\partial y} + z^2 \left( 1 + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (146)$$

а въ тѣхъ членахъ, гдѣ эти квадраты окажутся помноженными на одну изъ производныхъ отъ  $u, v, w$  по  $x, y, z$ , можно замѣнить ихъ квадратами:  $r^2, v^2, z^2$ .

3) Нижеслѣдующія произведенія могутъ быть замѣнены слѣдующими суммами:

$$(v + \Delta v)(z + \Delta w) = v^2 \frac{\partial v}{\partial y} + z^2 \frac{\partial v}{\partial z} + vz \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + zr \frac{\partial v}{\partial x} + rv \frac{\partial w}{\partial x} \dots (147, a)$$

$$(z + \Delta w)(r + \Delta u) = r^2 \frac{\partial w}{\partial x} + z^2 \frac{\partial w}{\partial z} + vz \frac{\partial u}{\partial y} + zr \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + rv \frac{\partial w}{\partial y} \dots (147, b)$$

$$(r + \Delta u)(v + \Delta v) = r^2 \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 \frac{\partial u}{\partial y} + vz \frac{\partial u}{\partial z} + rz \frac{\partial v}{\partial x} + rv \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \dots (147, c)$$

а въ тѣхъ членахъ, гдѣ произведенія эти окажутся помноженными на частныя производныя, можно ихъ замѣнить произведеніями:  $vz, zr, rv$ .

4) Такъ какъ:

$$r = \sqrt{r^2 + 2(r\Delta u + v\Delta v + z\Delta w) + (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2},$$

то, развертывая по восходящимъ степенямъ отношеній:  $(\Delta u:r), (\Delta v:r), (\Delta w:r)$ , и пренебрегая третьими и высшими степенями этихъ отношеній, найдемъ слѣдующее приближенное выраженіе для разности  $(r - r)$ :

$$r - r = \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha^2}{r^2} - \frac{\alpha^2}{r^2} \right), \dots \dots \dots (148)$$

гдѣ:

$$\alpha^2 = (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2 \dots \dots \dots (149)$$

$$\alpha = r\Delta u + v\Delta v + z\Delta w = \epsilon_1 r^2 + \epsilon_2 v^2 + \epsilon_3 z^2 + 2g_1 vz + 2g_2 zr + 2g_3 rv. (150)$$

5) Частное  $(\varphi(r):r)$  можно разложить въ рядъ по восходящимъ степенямъ разности  $(r - r)$ ; пренебрегая вторыми и высшими степенями ея, будемъ имѣть:

$$\frac{\varphi(r)}{r} = \frac{\varphi(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)}{dr} (r - r),$$

$$\frac{\varphi(r)}{r} = \frac{\varphi(r)}{r} + \psi(r) \alpha; \dots \dots \dots (151)$$

Где  $\psi(r)$  есть сокращенное обозначение следующей функции от  $r$ :

$$\psi(r) = \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)}{dr} \dots \dots \dots (152)$$

6) Такъ какъ  $\alpha$  есть линейное выраженіе относительно частныхъ производныхъ  $u, v, w$  (см. 150), то въ тѣхъ членахъ, которые будутъ заключать  $\psi(r)$ , можно замѣнить  $(1 + \alpha)$  — единицею, а вмѣсто  $(r + \Delta u)$ ,  $(r + \Delta v)$ ,  $(r + \Delta w)$  подставить вместо  $x, y, z$ .

Послѣ всѣхъ этихъ приготовленій нетрудно будетъ убѣдиться, что выраженія 39) при сказанномъ приближеніи получаютъ слѣдующій видъ:

$$N_1 = N_1^0 (1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) + 2T_3^0 \frac{\partial u}{\partial y} + 2T_2^0 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1} \dots (153, a)$$

$$N_2 = 2T_3^0 \frac{\partial v}{\partial x} + N_2^0 (1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3) + 2T_1^0 \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2} \dots (153, b)$$

$$N_3 = 2T_2^0 \frac{\partial w}{\partial x} + 2T_1^0 \frac{\partial w}{\partial y} + N_3^0 (1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_3} \dots (153, c)$$

$$T_1 = N_3^0 \frac{\partial u}{\partial y} + N_3^0 \frac{\partial v}{\partial z} + T_1^0 (1 - \varepsilon_1) + T_2^0 \frac{\partial v}{\partial x} + T_3^0 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial (2g_1)} \dots (153, d)$$

$$T_2 = N_1^0 \frac{\partial u}{\partial x} + N_3^0 \frac{\partial u}{\partial z} + T_1^0 \frac{\partial u}{\partial y} + T_2^0 (1 - \varepsilon_2) + T_3^0 \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial (2g_2)} \dots (153, e)$$

$$T_3 = N_1^0 \frac{\partial v}{\partial x} + N_2^0 \frac{\partial u}{\partial y} + T_1^0 \frac{\partial u}{\partial z} + T_2^0 \frac{\partial v}{\partial z} + T_3^0 (1 - \varepsilon_3) + \frac{\partial W}{\partial (2g_3)} \dots (153, f)$$

Где  $W$  означаетъ слѣдующую однородную функцию второй степени отъ  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, g_1, g_2, g_3$ :

$$2W = \left. \begin{aligned} & A_1 \varepsilon_1^2 + 2B_1 (\varepsilon_2 \varepsilon_3 + 2g_1^2) + 2(211) (2g_1 \varepsilon_1 + 4g_2 g_3) + \\ & + A_2 \varepsilon_2^2 + 2B_2 (\varepsilon_3 \varepsilon_1 + 2g_2^2) + 2(121) (2g_2 \varepsilon_2 + 4g_3 g_1) + \\ & + A_3 \varepsilon_3^2 + 2B_3 (\varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2g_3^2) + 2(112) (2g_3 \varepsilon_3 + 4g_1 g_2) + \\ & + 4(301) \varepsilon_1 g_2 + 4(130) \varepsilon_2 g_3 + 4(013) \varepsilon_3 g_1 + \\ & + 4(310) \varepsilon_1 g_3 + 4(031) \varepsilon_2 g_1 + 4(103) \varepsilon_3 g_2 \end{aligned} \right\} \dots (154)$$

Коэффициенты въ этомъ многочленѣ  $W$  могутъ быть выражены суммами вида:

$$- \frac{\alpha}{2} \sum_m \frac{d\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)}{r dr} x^a y^b z^c, \dots \dots \dots (155)$$

а именно: если здѣсь сдѣлать  $a = 4$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$ , то эта сумма выразитъ коэффициентъ  $A_1$ , если же сдѣлать  $a = 0$ ,  $b = 2$ ,  $c = 2$ , то получится выраженіе коэффициента  $B_1$ , и т. д., какъ видно изъ слѣдующей таблицы:

Коэффициенты.	$a$	$b$	$c$
$A_1$ .....	4	0	0
$A_2$ .....	0	4	0
$A_3$ .....	0	0	4
$B_1$ .....	0	2	2
$B_2$ .....	2	0	2
$B_3$ .....	2	2	0
(211) .....	2	1	1
(121) .....	1	2	1
(112) .....	1	1	2
(301) .....	3	0	1
(310) .....	3	1	0
(130) .....	1	3	0
(031) .....	0	3	1
(013) .....	0	1	3
(103) .....	1	0	3

### § 35. Начало д'Аламбера въ примѣненіи къ сплошному деформируемому тѣлу. Другой пріемъ вывода выраженій (153).

Для вывода выраженій (153) можно еще воспользоваться другимъ пріемомъ, основаннымъ на примѣненіи начала д'Аламбера къ сплошному деформируемому тѣлу.

Примѣняя начало д'Аламбера къ системѣ матеріальныхъ точекъ, мы выражаемъ его слѣдующимъ равенствомъ:

$$\Sigma [X_i - m_i x_i''] \delta x_i + (Y_i - m_i y_i'') \delta y_i + (Z_i - m_i z_i'') \delta z_i = 0, \dots (156)$$

въ которомъ суммирование распространено по всѣмъ точкамъ системы.

Примѣняя теперь начало д'Аламбера къ деформируемому тѣлу и, имѣя въ виду вывести изъ него дифференціальныя уравненія (17) и выраженія напряженій (153) мы должны будемъ надлежащимъ образомъ преобразовать равенство (156), примѣненное къ сплошному тѣлу, и ввести, вмѣсто силъ, приложенныхъ къ матеріальнымъ точкамъ, — объемныя силы и напряженія, а вмѣсто суммированія, — интегрированія по объему и по поверхностямъ.

Подразумѣвая, какъ въ предыдущихъ параграфахъ, подъ  $x, y, z$  координаты точекъ тѣла въ его предварительномъ состояніи и подъ  $x + u, y + v, z + w$  координаты тѣхъ же точекъ въ деформированномъ состояніи, должны будемъ подставить:

$$\frac{d^2 u}{dt^2}, \quad \frac{d^2 v}{dt^2}, \quad \frac{d^2 w}{dt^2}$$

вмѣсто проэкцій ускореній точекъ тѣла и  $\delta u, \delta v, \delta w$  — вмѣсто варьаций координатъ точекъ.



Предположивъ, что все тѣло раздѣлено на бесконечно-малые элементы объема и считавъ каждый такой элементъ матерьяльною точкою, должны будемъ выразить возможный моментъ силъ объемныхъ и силъ инерціи слѣдующимъ интеграломъ:

$$\iiint \left[ \left( X - \frac{d^2 u}{dt^2} \right) \delta u + \left( Y - \frac{d^2 v}{dt^2} \right) \delta v + \left( Z - \frac{d^2 w}{dt^2} \right) \delta w \right] \sigma_1 dO, \dots (157)$$

гдѣ интеграль распространень по всему объему тѣла въ его деформированномъ состояніи и  $\sigma_1$  есть плотность вещества въ этомъ состояніи.

Возможный моментъ вѣщныхъ напряженій, приложенныхъ къ наружной деформированной поверхности тѣла, выразится интеграломъ:

$$\iint (X_s \delta u_s + Y_s \delta v_s + Z_s \delta w_s) dS, \dots (158)$$

распространеннымъ по этой поверхности; здѣсь  $u_s, v_s, w_s$  относятся къ одной изъ точекъ элемента  $dS$  поверхности, а  $X_s, Y_s, Z_s$  суть проекція на оси координатъ вѣщаго напряженія, дѣйствующаго въ этой точкѣ.

Далѣе, такъ какъ частичныя силы, дѣйствующія между каждыми двумя атомами или частицами тѣла, суть силы, имѣющія потенциалъ, то возможный моментъ всѣхъ частичныхъ силъ тѣла можетъ быть выраженъ варьяцією потенціала  $\Pi$  всей системы частицъ на себя:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum mV,$$

гдѣ  $mV$  есть потенціалъ всей системы на одну изъ частицъ (масса которой —  $m$ ), а суммирование распространено на всю систему.

Потенціалъ же  $mV$  всей системы на такую частицу, которая не находится въ поверхностномъ слое, выразится слѣдующею суммою:

$$mV = m \sum F(r),$$

гдѣ

$$F(r) = \int \varphi(r) dr;$$

здѣсь введены обозначенія параграфа 32-го.

Пренебрегая третьими и высшими степенями разности  $(r - r)$ , функцію  $F(r)$  можно представить такъ:

$$F(r) = F(r) + (r - r) \varphi(r) + \frac{(r - r)^2}{2} \frac{d\varphi(r)}{dr},$$

а если замѣнить здѣсь разность  $(r - r)$  выраженіемъ (148), приведеннымъ въ предыдущемъ параграфѣ, то получимъ слѣдующее приближенное выраженіе для функціи  $F(r)$ :

$$F(r) = F(r) + \left( \alpha + \frac{1}{2} x^2 \right) \frac{\varphi(r)}{r} + \alpha^2 \frac{d \left( \frac{\varphi(r)}{r} \right)}{r dr}, \dots (159)$$

гдѣ отброшены члены, заключающіе третьи и высшія степени отношеній  $(\Delta u:r)$ ,  $(\Delta v:r)$ ,  $(\Delta w:r)$ .

Подставивъ въ (159) вмѣсто  $\alpha$  и  $\kappa$  выраженія ихъ (150) и (149), найдемъ, что половина произведенія  $\sigma V$  выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{1}{2} \sigma V = \Phi, \dots \dots \dots (160, a)$$

$$\Phi = \frac{\sigma}{2} \sum m F(r) - \Phi_0 - W \dots \dots \dots (160, b)$$

$$\begin{aligned} 2\Phi_0 = & N_1^0 \left( 2\epsilon_1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + 2T_1^0 \left( 2g_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ & + N_2^0 \left( 2\epsilon_2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + 2T_2^0 \left( 2g_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ & + N_3^0 \left( 2\epsilon_3 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) + 2T_3^0 \left( 2g_3 + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

здѣсь  $W$  означаетъ однородную функцію второй степени отъ  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, g_1, g_2, g_3$ , выражаемую формулою (154) предыдущаго параграфа.

Во всѣхъ суммахъ вида  $\sum$ , заключающихся въ этихъ выраженіяхъ, суммированіе распространяется на всю сферу радіуса равнаго  $\rho$ , описанную вокругъ взятой точки тѣла, предполагая, что эта точка не находится въ наружномъ поверхностномъ слоѣ тѣла.

Если взять точку тѣла, находящуюся въ варужномъ поверхностномъ слоѣ, то для нея  $\Phi$  выразится также формулою (160, b), но суммированія  $\sum$  будутъ распространены не по полной сферѣ радіуса  $\rho$ , описанной вокругъ взятой точки, но только по той части этой сферы, которая заполнена веществомъ тѣла, такъ какъ часть этой сферы выступаетъ внаружу тѣла.

Полученное выраженіе для  $V$ , равнаго  $(2\Phi:\sigma)$ , подставимъ въ выраженіе потенціала  $\Pi$  всей системы на себя, который, подобно выраженію (157), представимъ въ видѣ интеграла *распространеннаго по всемъ элементамъ объема, занимаемаго тѣломъ въ рассматриваемый моментъ времени*:

$$\Pi = \iiint \frac{\sigma}{r} \Phi dO; \dots \dots \dots (161)$$

здѣсь, какъ и въ интегралѣ (157),  $\sigma$ , есть плотность въ деформированномъ состояніи, а  $dO$  есть объемъ одного изъ элементовъ тѣла въ этомъ состояніи, такъ что:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1+\epsilon}, \quad dO = dx dy dz, \dots \dots \dots (162)$$

гдѣ:

$$x = x + u, \quad y = y + v, \quad z = z + w.$$

Теперь слѣдуетъ составить варіацію отъ II; но прежде этого мы преобразуемъ этотъ интегралъ, распространенный по объему, занимаемому тѣломъ въ деформированномъ состояніи, въ интегралъ, распространенный по тому объему, который оно занимаетъ въ предварительномъ состояніи.

При такомъ преобразованіи мы должны будемъ замѣнить  $dx dy dz$  черезъ  $dx dy dz$ , гдѣ

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \epsilon_1 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \epsilon_2 & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 + \epsilon_3 \end{vmatrix},$$

гдѣ

$$D = (1 + \rho) = \frac{\sigma}{\sigma_1}.$$

Послѣ этого потенциалъ II получить такой видъ:

$$II = \iiint \Phi dx dy dz, \dots \dots \dots (163)$$

Этотъ интегралъ распространенъ по объему тѣла въ его *предварительномъ состояніи*.

Возьмемъ теперь варіацію отъ II:

$$\delta II = \iiint \delta \Phi dx dy dz, \dots \dots \dots (164)$$

$$\begin{aligned} \delta \Phi = & \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_1} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_2} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_3} \frac{\partial \delta v}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial w_1} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial w_2} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_3} \frac{\partial \delta w}{\partial z}; \dots \dots \dots (165) \end{aligned}$$

Здѣсь, для краткости, производныя отъ  $v$  и  $w$  по  $x$  означены черезъ  $v_1$  и  $w_1$ , производныя отъ  $w$  и  $u$  по  $y$  — черезъ  $w_2$  и  $u_2$  и производныя отъ  $u$  и  $v$  по  $z$  — черезъ  $u_3$  и  $v_3$ .

Теперь снова сдѣлаемъ преобразование интеграла (164) отъ координатъ первоначальныхъ ( $x, y, z$ ) къ координатамъ  $x, y, z$ , тогда варіація отъ II получить такой видъ:

$$\delta II = \iiint \frac{\partial \Phi}{1 + \rho} dx dy dz, \dots \dots \dots (166)$$

Этотъ интегралъ распространенъ по объему тѣла въ его *деформированномъ состояніи*.

Замѣнимъ производную отъ  $\delta u$  по  $x$  слѣдующею суммою:

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x} = \frac{\partial \delta u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

и съ прочими подобными производными поступимъ такимъ же образомъ; сдѣлавъ это, найдемъ, что подынтегральная функція въ интегралѣ (166) получитъ слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Phi}{1+\theta} &= F_1 \frac{\partial \delta u}{\partial x} + F_2 \frac{\partial \delta u}{\partial y} + F_3 \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \\ &+ G_1 \frac{\partial \delta v}{\partial x} + G_2 \frac{\partial \delta v}{\partial y} + G_3 \frac{\partial \delta v}{\partial z} + \\ &+ H_1 \frac{\partial \delta w}{\partial x} + H_2 \frac{\partial \delta w}{\partial y} + H_3 \frac{\partial \delta w}{\partial z}, \dots\dots\dots (167) \end{aligned}$$

здѣсь:

$$F_1 = \frac{1}{1+\theta} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \frac{\partial x}{\partial z} \right)$$

$$F_2 = \frac{1}{1+\theta} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \frac{\partial y}{\partial z} \right)$$

$$G_1 = \frac{1}{1+\theta} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_3} \frac{\partial x}{\partial z} \right)$$

и т. п.; при этомъ:

$$- \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} = N_1^0 (1 + \varepsilon_1) + T_3^0 u_2 + T_2^0 u_3 + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1},$$

$$- \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} = T_3^0 (1 + \varepsilon_1) + N_2^0 u_3 + T_1^0 u_3 + \frac{\partial W}{\partial (2g_3)},$$

$$- \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} = T_2^0 (1 + \varepsilon_1) + T_1^0 u_2 + N_3^0 u_3 + \frac{\partial W}{\partial (2g_2)},$$

$$- \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} = N_1^0 v_1 + T_3^0 (1 + \varepsilon_2) + T_2^0 v_3 + \frac{\partial W}{\partial (2g_3)},$$

$$- \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} = T_3^0 v_1 + N_2^0 (1 + \varepsilon_2) + T_1^0 v_3 + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2},$$

$$- \frac{\partial \Phi}{\partial v_3} = T_2^0 v_1 + T_1^0 (1 + \varepsilon_3) + N_3^0 v_3 + \frac{\partial W}{\partial (2g_1)},$$

и т. д.; кромѣ того, пренебрегая вторыми и высшими степенями производныхъ отъ  $u, v, w$ :

$$\frac{1}{1+\theta} \frac{\partial x}{\partial x} = 1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \frac{1}{1+\theta} \frac{\partial x}{\partial y} = u_2, \quad \frac{1}{1+\theta} \frac{\partial x}{\partial z} = u_3,$$

$$\frac{1}{1+\theta} \frac{\partial y}{\partial x} = v_1, \quad \frac{1}{1+\theta} \frac{\partial y}{\partial y} = 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \quad \frac{1}{1+\theta} \frac{\partial y}{\partial z} = v_3,$$

$$\frac{1}{1+\theta} \frac{\partial z}{\partial x} = w_1, \quad \frac{1}{1+\theta} \frac{\partial z}{\partial y} = w_2, \quad \frac{1}{1+\theta} \frac{\partial z}{\partial z} = 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$



Если пренебречь вторыми и высшими степенями величин  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, u_2, u_3, v_2, w_1, w_2$  и сравнить полученные таким образом выражения для  $F_1, F_2, F_3, H_1, \dots, H_3$  съ формулами (153) предыдущаго параграфа, то окажется, что:

$$F_1 = -N_1, \quad G_2 = -N_2, \quad H_3 = -N_3, \\ G_3 = H_2 = -T_1, \quad H_1 = F_3 = -T_2, \quad F_2 = G_1 = -T_3.$$

Отсюда слѣдуетъ, что варіация отъ  $\Pi$  выразится слѣдующимъ интеграломъ, распространеннымъ по объему, занятому тѣломъ въ деформированномъ состояніи:

$$\delta\Pi = - \iiint Q \, dx \, dy \, dz, \dots\dots\dots (166, bis)$$

гдѣ:

$$Q = N_1 \frac{\partial \delta u}{\partial x} + N_2 \frac{\partial \delta v}{\partial y} + N_3 \frac{\partial \delta w}{\partial z} + T_1 \left( \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial z} \right) + \\ + T_2 \left( \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + T_3 \left( \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (167, bis)$$

Каждое изъ девяти произведеній, входящихъ въ составъ  $Q$ , можно преобразовать такимъ образомъ, какъ напримеръ слѣдующее:

$$N_1 \frac{\partial \delta u}{\partial x} = \frac{\partial (N_1 \delta u)}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial x} \delta u;$$

а тѣмъ, воспользовавшись формулами преобразованія (16) параграфа 10-го, можемъ получить слѣдующее выраженіе для  $\delta\Pi$ :

$$\delta\Pi = \iiint (P_1 \delta u + P_2 \delta v + P_3 \delta w) \, dO - \iint (S_1 \delta u + S_2 \delta v + S_3 \delta w) \, dS, \dots\dots (168)$$

гдѣ:

$$P_1 = \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial T_3}{\partial z}, \quad S_1 = N_1 \lambda + T_2 \mu + T_3 \nu, \\ P_2 = \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z}, \quad S_2 = T_3 \lambda + N_2 \mu + T_1 \nu, \\ P_3 = \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z}, \quad S_3 = T_2 \lambda + T_1 \mu + N_3 \nu, \\ \lambda = \cos(n, X), \quad \mu = \cos(n, Y) \quad \nu = \cos(n, Z);$$

тѣмъ интеграль объемный распространенъ по объему тѣла въ деформированномъ состояніи, интеграль поверхностный — по наружной поверхности этого объема, а  $n$  есть нормаль, возстановленная изъ точки элемента  $dS$  внаружу тѣла.

Составимъ теперь равенство, выражающее начало д'Аламбера:

$$\iiint [(\sigma_1 X + P_1 - \sigma_1 u'') \delta u + (\sigma_1 Y + P_2 - \sigma_1 v'') \delta v + (\sigma_1 Z + P_3 - \sigma_1 w'') \delta w] dO + \\ + \iint [(X_s - S_1) \delta u_s + (Y_s - S_2) \delta v_s + (Z_s - S_3) \delta w_s] dS = 0.$$

Если тѣло свободно, то варьингъ координатъ всѣхъ точекъ тѣла произвольны, а потому получаются слѣдующія дифференціальныя уравненія для всѣхъ точекъ тѣла:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \frac{d^2 u}{dt^2} &= \sigma_1 X + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} \\ \sigma_1 \frac{d^2 v}{dt^2} &= \sigma_1 Y + \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} \\ \sigma_1 \frac{d^2 w}{dt^2} &= \sigma_1 Z + \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (169)$$

и слѣдующія уравненія для точекъ наружной поверхности:

$$\left. \begin{aligned} X_s &= N_1 \cos(nX) + T_3 \cos(nY) + T_2 \cos(nZ), \\ Y_s &= T_3 \cos(nX) + N_2 \cos(nY) + T_1 \cos(nZ), \\ Z_s &= T_2 \cos(nX) + T_1 \cos(nY) + N_3 \cos(nZ), \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (170)$$

гдѣ  $n$  есть наружная нормаль къ деформированной поверхности.

Въ томъ случаѣ, когда какія либо точки тѣла закрѣплены неподвижно, въ уравненія этихъ точекъ войдутъ реакціи связей.

Такимъ образомъ начало д'Аламбера даетъ тѣ самыя уравненія (17), которыя получены другимъ путемъ въ главѣ I-й этой книги; притомъ выраженія для  $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ , полученные въ этомъ параграфѣ, тождественны съ выраженіями (153), найденными въ предыдущемъ параграфѣ.

### § 36. Коэффициенты упругости. Число коэффициентовъ для тѣлъ кристаллическихъ и изотропно-упругихъ.

Въ выраженіяхъ (153), кромѣ производныхъ отъ  $u, v, w$  по  $x, y, z$ , заключаются: 15 величинъ  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, (211), (121), (112), (301), (310), (130), (031), (013), (103)$  и 6 предварительныхъ напряженій  $N_1^0, N_2^0, N_3^0, T_1^0, T_2^0, T_3^0$ .

Всѣ эти величины, числомъ 21, могутъ быть функциями отъ  $x, y, z$ ; видъ этихъ функций зависитъ отъ строенія тѣла въ его предварительномъ состояніи.

Внутри тѣла, то есть въ точкахъ, не находящихся въ наружномъ поверхностномъ слое, эти величины могутъ быть *постоянными коэффициентами*, независящими отъ  $x, y, z$ ; но это возможно только въ такихъ тѣлахъ, внутреннія части которыхъ имѣютъ однородное строеніе по всякимъ параллельнымъ между собою направленіямъ, проведеннымъ черезъ всѣ внутреннія точки тѣла.

Всякія двѣ части такого тѣла, ограниченныя какими либо замкнутыми, подобно расположенными и тождественными по виду и по размѣрамъ поверхностями, будутъ имѣть одинаковое строеніе, гдѣ бы эти части ни были внутри тѣла, лишь бы онѣ не включали въ себѣ частей поверхностнаго слоя.

Тѣло, обладающее въ предварительномъ состояніи такимъ параллелизмомъ и такою однородностью строенія, называется тѣломъ *однороднаго строенія*.

Надо имѣть въ виду, что наружный поверхностный слой можетъ отличаться по своему строенію отъ прочихъ частей тѣла, такъ что тѣло можетъ имѣть внутри строеніе однородное, а въ наружномъ поверхностномъ слое — неоднородное.

И такъ, во внутреннихъ точкахъ тѣла, обладающаго однороднымъ строеніемъ, каждая сумма вида:

$$-\frac{\sigma}{2} \sum \varphi_r^{(\gamma)} r^{\alpha} v^{\beta} z^{\gamma}, \quad -\frac{\sigma}{2} \sum \psi(r) r^{\alpha} v^{\beta} z^{\gamma} \dots \dots \dots (171)$$

имѣетъ одно и то же значеніе во всѣхъ точкахъ тѣла, а потому величины  $A_1, A_2, \dots (103), N_1^0, N_2^0, \dots, T_3^0$  суть постоянныя коэффициенты для этого тѣла; эти коэффициенты называются *коэффициентами упругости* такого тѣла и число ихъ не больше двадцати одного.

1) Если строеніе тѣла не только однородно, но и еще симметрично относительно параллельныхъ между собою плоскостей, а именно, если сферы радіуса  $r$ , окружающія каждую точку, симметричны относительно плоскостей проведенныхъ черезъ центры сферъ параллельно плоскости  $YZ$ , то нѣкоторые изъ коэффициентовъ упругости будутъ равны нулю. Въ самомъ дѣлѣ, при такомъ строеніи тѣла каждой частицѣ, находящейся внутри сферы дѣйствія частицы  $M$ , соответствуетъ симметричная ей относительно сказанной плоскости другая частица равной массы, имѣющая тѣ же  $v$  и  $z$ , но противоположное по знаку  $x$ ; по этому всѣ суммы вида (171), заключающія  $x$  въ нечетной степени, будутъ равны нулю. Стало быть будутъ равны нулю коэффициенты:  $T_1^0, T_2^0, (112), (121), (103), (130), (301), (310)$ .

И такъ, при симметричномъ строеніи относительно плоскостей параллельныхъ  $YZ$ , тѣло будетъ имѣть 13 коэффициентовъ упругости:

$$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, (211), (031), (013), N_1^0, N_2^0, N_3^0, T_1^0.$$

2) Если строеніе тѣла имѣетъ такую же симметрію не только относительно плоскостей параллельныхъ плоскости  $YZ$ , но и еще относительно плоскостей параллельныхъ плоскости  $ZX$ , то будутъ равны нулю также и тѣ коэффициенты, въ которые входитъ  $y$  въ нечетной степени, а именно:  $T_1^0, (211), (031)$  и  $(013)$  и останется 9 коэффициентовъ, именно:

$$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, N_1^0, N_2^0, N_3^0,$$

откуда видно, что тогда и плоскости параллельныя плоскости  $XU$  суть тоже плоскости симметріи.

Въ этомъ случаѣ выраженія (153) получаютъ слѣдующій видъ:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= N_1^0 + (A_1 + N_1^0) \varepsilon_1 + (B_3 - N_1^0) \varepsilon_2 + (B_2 - N_1^0) \varepsilon_3, \\ N_2 &= N_2^0 + (B_3 - N_2^0) \varepsilon_1 + (A_2 + N_2^0) \varepsilon_2 + (B_1 - N_2^0) \varepsilon_3, \\ N_3 &= N_3^0 + (B_2 - N_3^0) \varepsilon_1 + (B_1 - N_3^0) \varepsilon_2 + (A_3 + N_3^0) \varepsilon_3, \end{aligned} \right\} \dots (172, 1)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= g_1 (2B_1 + N_2^0 + N_3^0) + \omega_1 (N_2^0 - N_3^0), \\ T_2 &= g_2 (2B_2 + N_3^0 + N_1^0) + \omega_2 (N_3^0 - N_1^0), \\ T_3 &= g_3 (2B_3 + N_1^0 + N_2^0) + \omega_3 (N_1^0 - N_2^0). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (172, 2)$$

3) Если строеніе тѣла имѣетъ симметрію вокругъ осей параллельныхъ оси  $Z$ -овъ, такъ что сферы радіуса  $\rho$ , окружающія каждую точку  $M$  тѣла, имѣютъ симметрію вокругъ осей параллельныхъ этой оси и проведенныхъ черезъ центръ сферы, то число коэффициентовъ упругости уменьшается еще на четыре. Въ самомъ дѣлѣ, тогда коэффициенты упругости должны оставаться неизмѣнными при поворотѣ плоскостей  $ZX$  и  $ZY$  относительно тѣла на произвольный уголъ вокругъ оси  $Z$ -овъ. Повернемъ эти плоскости на прямой уголъ, такъ чтобы новая ось  $X$ -овъ совпала съ прежнею осью  $Y$ -овъ, а новая ось  $Y$ -овъ съ отрицательнымъ направлениемъ прежней оси  $X$ -овъ, тогда новыя координаты  $x'$  и  $y'$  будутъ равны старымъ  $y$  и  $-x$  и новыя коэффициенты  $(N_1^0)'$ ,  $A_1$ ,  $(N_2^0)'$ ,  $A_2'$ ,  $B_1'$  будутъ соответственно равны старымъ  $N_2^0$ ,  $A_2$ ,  $N_1^0$ ,  $A_1$ ,  $B_2$ ; но такъ какъ такой поворотъ осей не долженъ вовсе измѣнить величинъ всѣхъ коэффициентовъ, то отсюда слѣдуетъ, что должны быть:

$$N_1^0 = N_2^0, \quad A_1 = A_2, \quad B_1 = B_2$$

Повернемъ тѣ же плоскости на уголъ въ  $45^\circ$ , тогда новыя  $x$  и  $y$ , которыя мы означимъ черезъ  $x_2$  и  $y_2$ , выразятся въ прежнихъ такъ:

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x),$$

а потому новое  $B_3'$ , которое должно быть равно прежнему  $B_3$ , выразится такъ:

$$\begin{aligned} B_3' = B_3 = & - \frac{\sigma}{2} \sum m \psi(r) x_2^2 y_2^2 = - \frac{\sigma}{8} \sum m \psi(r) x^4 - \frac{\sigma}{8} \sum m \psi(r) y^4 + \\ & + \frac{\sigma}{4} \sum m \psi(r) x^2 y^2, \end{aligned}$$

то есть:  $2B_3 = A_1 - B_3$  и отсюда:  $A_1 = A_2 = 3B_3$ .

Такимъ образомъ оказывается, что тѣло, имѣющее строеніе однородное и симметричное вокругъ осей параллельныхъ оси  $Z$ -овъ, имѣетъ 5 коэффициентовъ упругости:

$$N^0, N_2^0, A_3, B, B_3.$$



Въ этомъ случаѣ выраженія (153) получаютъ слѣдующій видъ:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= N^0 + (3B_3 + N^0) \varepsilon_1 + (B_3 - N^0) \varepsilon_2 + (B - N^0) \varepsilon_3, \\ N_2 &= N^0 + (B_3 - N^0) \varepsilon_1 + (3B_3 + N^0) \varepsilon_2 + (B - N^0) \varepsilon_3, \\ N_3 &= N_3^0 + (B - N^0) (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (A_3 + N_3^0) \varepsilon_3, \\ T_1 &= g_1 (2B + N^0 + N_3^0) + (N^0 - N_3^0) \omega_1 \\ T_2 &= g_2 (2B + N^0 + N_3^0) + (N_3^0 - N^0) \omega_2 \\ T_3 &= 2g_3 (B_3 + N^0). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (173, 1)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= g_1 (2B + N^0 + N_3^0) + (N^0 - N_3^0) \omega_1 \\ T_2 &= g_2 (2B + N^0 + N_3^0) + (N_3^0 - N^0) \omega_2 \\ T_3 &= 2g_3 (B_3 + N^0). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (173, 2)$$

4) Если строеніе однороднаго тѣла не только симметрично относительно трехъ системъ плоскостей, параллельныхъ плоскостямъ координатъ, но кромѣ того одинаково то тремъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ, параллельнымъ осямъ координатъ такъ что по направленіямъ параллельнымъ оси  $X$ -овъ строеніе нѣтъ не отличается отъ строенія по направленіямъ параллельнымъ оси  $Y$ -овъ и отъ строенія по направленіямъ параллельнымъ оси  $Z$ -овъ, то тогда должно быть:

$$A_1 = A_2 = A_3, \quad B_1 = B_2 = B_3, \quad N_1^0 = N_2^0 = N_3^0.$$

Въ этомъ случаѣ выраженія (153) будутъ заключать только три коэффициента упругости  $A$ ,  $B$  и  $N$  и будутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= N^0 + (A + N^0) \varepsilon_1 + (B - N^0) (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ N_2 &= N^0 + (A + N^0) \varepsilon_2 + (B - N^0) (\varepsilon_3 + \varepsilon_1) \\ N_3 &= N^0 + (A + N^0) \varepsilon_3 + (B - N^0) (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (174, 1)$$

$$T_1 = 2g_1 (B + N^0), \quad T_2 = 2g_2 (B + N^0), \quad T_3 = 2g_3 (B + N^0) \dots (174, 2)$$

5) Строеніе однороднаго тѣла называется *изотропнымъ*, если оно одинаково по всемъ направленіямъ, такъ что симметрія строенія сферъ радиуса  $\rho$  существуетъ во-кругъ всякихъ діаметровъ и относительно всякихъ діаметральныхъ плоскостей этихъ сферъ.

Въ этихъ случаяхъ  $A=3B$  и число коэффициентовъ упругости равно двумъ. Вы-  
раженія (153) принимаютъ для изотропно-упругаго тѣла такой видъ:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= N^0 + 2K\varepsilon_1 + (B - N^0) \theta, \quad T_1 = 2g_1 K \\ N_2 &= N^0 + 2K\varepsilon_2 + (B - N^0) \theta, \quad T_2 = 2g_2 K \\ N_3 &= N^0 + 2K\varepsilon_3 + (B - N^0) \theta, \quad T_3 = 2g_3 K \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (175)$$

$$K = B + N^0.$$

Здѣсь  $K$  можно разсматривать какъ одинъ изъ коэффициентовъ упругости, ( $B - N^0$ ) — какъ другой; полуразность этихъ двухъ коэффициентовъ дастъ величину  $N$ .

Изъ этихъ разсужденій и полученныхъ формулъ между прочимъ видно, что въ тѣлѣ, имѣющемъ изотропное строеніе, или же строеніе указанное въ пунктѣ 4-мъ настоящаго параграфа, предварительныя напряженія во всѣхъ точкахъ тѣла и на всякихъ площадкахъ одинаковы и нормальны къ нимъ, такъ что эллипсоиды предварительныхъ напряженій суть сферы.

### § 37. Разсмотрѣніе значеній двухъ коэффициентовъ упругости изотропно-упругаго тѣла.

Представимъ себѣ какое либо тѣло, которое въ предварительномъ состояніи имѣетъ изотропное строеніе во всѣхъ своихъ частяхъ за исключеніемъ поверхностнаго наружнаго слоя.

На основаніи сказаннаго въ предыдущемъ параграфѣ относительно однородности строенія, предварительное напряженіе  $N^0$  внутри всей изотропной части тѣла должно имѣть одну и ту же величину. Между прочимъ можемъ замѣтить, что постоянство величины  $N^0$  вытекаетъ также и изъ уравненій (135) параграфа 33-го, примененныхъ къ изотропной части тѣла, такъ какъ онѣ въ этомъ случаѣ принимаютъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\partial N^0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial N^0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N^0}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (135, bis)$$

Для того, чтобы внутренняя изотропная часть тѣла имѣла предварительное напряженіе  $N^0$  не равное нулю, необходимо, чтобы наружный поверхностный слой, имѣющій неизотропное \*) строеніе, производилъ на внутреннюю часть поверхностное напряженіе, равное  $N^0$ . Слѣдуетъ замѣтить, что строеніе поверхностнаго слоя можетъ быть при этомъ не только не изотропнымъ, но даже и не параллельно-однороднымъ.

Предположимъ, что къ наружной поверхности тѣла будутъ приложены поверхностныя напряженія, которыя, черезъ посредство поверхностнаго слоя, передадутся изотропной части тѣла. Спрашивается, каковы должны быть напряженія, испытываемыя наружною поверхностью изотропной части тѣла со стороны поверхностнаго слоя, для того, чтобы эта часть тѣла получила слѣдующую деформацію:

$$u = ax, \quad v = by, \quad w = cz, \dots \dots \dots (176)$$

(гдѣ  $a, b, c$  суть величины постоянныя), и въ этомъ видѣ осталась бы въ покоѣ?

По формуламъ (175) предыдущаго параграфа мы найдемъ, что при такой деформации въ изотропной части тѣла разовьются слѣдующія напряженія:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= N^0 + 2Ka + (B - N^0)(a + b + c), \quad T_1 = 0, \\ N_2 &= N^0 + 2Kb + (B - N^0)(a + b + c), \quad T_2 = 0, \\ N_3 &= N^0 + 2Kc + (B - N^0)(a + b + c), \quad T_3 = 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots (177)$$

\*) Неизотропное однородное строеніе называется строеніемъ *голотропнымъ*.

Эти напряжения должны удовлетворять уравнениям равновѣсія, которыя получаются изъ уравненій (169) параграфа 35-го, если въ нихъ положить ускоренія равными нулю (такъ какъ тѣло находится въ покоѣ). Такъ какъ объемныя силы не дѣйствуютъ на тѣло, то эти уравненія равновѣсія будутъ:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_x}{\partial y} + \frac{\partial T_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial N_x}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T_z}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_z}{\partial z} = 0. \quad (178)$$

Выраженія (177) удовлетворяютъ этимъ дифференціальнымъ уравненіямъ, такъ какъ всѣ три  $T$  равны нулю и всѣ три  $N$  постоянны внутри всего тѣла.

На площадкѣ наружной поверхности изотропной части тѣла должны дѣйствовать слѣдующія напряжения со стороны поверхностнаго слоя:

$$X_\mu = N_1 \cos(\mu, X), \quad Y_\mu = N_2 \cos(\mu, Y), \quad Z_\mu = N_3 \cos(\mu, Z), \dots \quad (179)$$

Гдѣ  $\mu$  есть нормаль къ наружной поверхности изотропной части тѣла, направленная *наружу* этой части.

Рассмотримъ сначала такой случай, когда  $b = c = a = a_1$ , то есть когда линейныя растяженія по всѣмъ направленіямъ одинаковы и равны  $a_1$ .

Въ этомъ случаѣ наружная поверхность тѣла въ деформированномъ состояніи подобна и подобно-расположена съ поверхностью тѣла въ предварительномъ состояніи; то же самое относится и къ поверхностямъ, ограничивающимъ любыя части тѣла.

Кубическое расширеніе единицы объема вещества равно  $3a_1$ ;  $\theta = 3a_1$ .

Всѣ три главныхъ напряжения равны между собою:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N^0 + 2Ka_1 + 3(B - N^0)a_1 = N$$

На площадкѣ наружной поверхности изотропной части должны дѣйствовать нормальныя къ площадкамъ напряжения равныя  $N$  (на единицу поверхности).

Если вычесть изъ  $N$  предварительныя напряжения  $N^0$ , то получимъ прибавочныя напряжения  $(N - N^0)$ , подъ вліяніемъ которыхъ тѣло получаетъ такую деформацию.

Отношеніе между величиною прибавочнаго напряжения  $(N - N^0)$  и величиною производимаго имъ кубическаго расширенія ( $\theta = 3a_1$ ) называется *объемнымъ сопротивленіемъ* вещества изотропнаго тѣла или *модулемъ сжимаемости*; этотъ коэффициентъ будемъ обозначать буквою  $R$ \*).

$$R = \frac{(N - N^0)}{3a_1} = \frac{2}{3}K + B - N^0 \dots \dots \dots (180)$$

Представимъ себѣ теперь что изотропная часть тѣла испытала слѣдующую деформацию:

$$u = 0, \quad v = bx, \quad w = 0,$$

то есть простой сдвигъ параллельно плоскости  $YZ$  по оси  $Y$ -овъ (см. примѣръ 1-й въ § 24 на стр. 66-й).

\*) По англійски этотъ коэффициентъ называется *resilience of volume*

По формуламъ (175) окажется, что при этомъ сдвигъ разовьются слѣдующія напряжения:

$$N_1 = N^0 = N_2 = N_3, \quad T_3 = Kb_2, \quad T_1 = T_2 = 0.$$

Эти выраженія удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравненіямъ (178).

Предположимъ, что наружною поверхностью изотропной части тѣла служатъ двѣ плоскости, параллельныя плоскости  $YZ$ ; къ этимъ плоскостямъ должны быть приложены слѣдующія напряжения:

$$X_\mu = N^0, \quad Y_\mu = Kb_1, \quad Z_\mu = 0, \quad \text{тамъ гдѣ } \cos(\mu, X) = +1$$

$$X_\mu = -N^0, \quad Y_\mu = -Kb_1, \quad Z_\mu = 0, \quad \text{тамъ гдѣ } \cos(\mu, X) = -1.$$

на единицу поверхности.

Отношеніе между величиною прибавочнаго тангенціального напряженія и величиною сдвига имъ производимаго, называется простою твердостью или *сопротивленіемъ срыванію* (Simple rigidity, resistance to shearing), или *модулемъ твердости*; изъ предыдущаго видно, что модуль твердости равенъ  $K$ .

Возвратимся снова къ деформаци (176) и на этотъ разъ предположимъ, что изотропная часть тѣла есть призма, длина которой параллельна оси  $X$ -овъ, или цилиндръ, параллельный этой оси, и что  $c = b = b_3$ ,  $a = a_3$ .

Кубическое расширеніе при этомъ будетъ:  $\theta = a_3 + 2b_3$ .

Въ формулахъ (177) замѣнимъ теперь коэффициентъ  $(R - N^0)$  разностью  $(R - \frac{2}{3}K)$  (согласно съ формулою (180)), тогда, въ примѣненія къ настоящему случаю, онѣ получатъ слѣдующій видъ:

$$N_1 = N^0 + 2Ka_3 + (R - \frac{2}{3}K)(a_3 + 2b_3) \dots \dots \dots (181)$$

$$N_3 = N_2 = N^0 + 2Kb_3 + (R - \frac{2}{3}K)(a_3 + 2b_3) = N \dots \dots \dots (182)$$

Къ поверхностямъ плоскихъ основаній цилиндра или призмы должны быть приложены слѣдующія напряжения:

$$X_\mu = \pm N_1, \quad Y_\mu = Z_\mu = 0,$$

гдѣ верхній знакъ относится къ тому основанію, на которомъ  $\cos(\mu, X) = +1$ .

Къ боковымъ же поверхностямъ цилиндра или призмы должны быть приложены нормальныя напряженія величины  $N$ .

Если къ боковой поверхности не приложено нормальныхъ добавочныхъ напряженій, такъ что  $N - N^0 = 0$ , то отношеніе  $b_3$  къ  $a_3$  опредѣлится изъ равенства (182), сдѣлавъ въ немъ  $N$  равнымъ  $N^0$ ; изъ него получимъ:

$$\frac{b_3}{a_3} = -\frac{1}{2} \frac{3R - 2K}{3R + K}.$$



Это отрицательное количество, выражающее величину отношения между поперечным линейным сжатием и продольным линейным удлинением вещества призмы при приложении къ концам ея растягивающих ее напряжений, будемъ обозначать черезъ —  $\kappa$ .

$$\kappa = - \frac{b_3}{a_3} = \frac{1}{2} \frac{3R - 2K}{R + K} \dots \dots \dots (183)$$

Замѣнивъ  $b_3$  черезъ  $(-a_3\kappa)$  въ выраженіи кубическаго расширенія  $\theta_3$  единицы объема вещества призмы и въ выраженіи напряженія  $N_1$ , получимъ:

$$\theta_3 = a_3 (1 - 2\kappa) = \frac{3Ka_3}{3R + K} \dots \dots \dots (184)$$

$$N_1 = N^0 + \frac{9RKa_3}{3R + K}.$$

Величина отношенія между прибавочнымъ напряженіемъ  $(N_1 - N^0)$ , удлиняющимъ призму, и величиною удлинненія  $a_3$  единицы длины призмы, называется Юнговымъ модулемъ или *модулемъ упругости* вещества призмы. Модуль упругости мы будемъ обозначать черезъ  $E$ :

$$E = \frac{N_1 - N^0}{a_3} = \frac{9RK}{3R + K} \dots \dots \dots (185)$$

Кубическое расширеніе  $\theta_3$  можетъ быть выражено такъ:

$$\theta_3 = \frac{N_1 - N^0}{R} \dots \dots \dots (186)$$

Если бы та же призма была подвержена дѣйствію прибавочныхъ напряженій  $(N_1 - N^0)$ , приложенныхъ не только къ основаніямъ призмы, но ко всей наружной поверхности ея, то вещество призмы получило бы кубическое расширеніе  $\theta$  равное:

$$\theta = \frac{N_1 - N^0}{R},$$

т. е. вътрое больше  $\theta_3$ .

Сопоставимъ теперь все то, что можно сказать относительно значенія коэффициентовъ упругости  $K$  и  $(B - N^0)$  изотропнаго тѣла и относительно величинъ  $R$ ,  $\kappa$  и  $E$ .

$K$  есть модуль твердости изотропнаго тѣла и выражаетъ величину тангенціальнаго напряженія, которое должно приложить къ параллельнымъ между собою наружнымъ гранямъ тѣла для того, чтобы сообщить ему простой сдвигъ величины равной единицѣ. Модуль твердости, имѣя измѣренія напряженія, можетъ быть выраженъ динами, дѣленными на квадратный сантиметръ; такъ, напримѣръ, модуль твердости мѣди равенъ:

$$4,47.10^{11} \frac{(\text{граммъ})}{(\text{сантиметръ}) (\text{секунда})^2}.$$

Для того, чтобы сообщить жѣдному пласти простой сдвигъ, имѣющій величину:  $2 \text{ кг } 10 = 0,0058$ , надо приложить къ каждому квадратному миллиметру поверхности пласта слѣдующее тангенціальное напряженіе, выраженное въ вѣсъ килограмма:

$$\frac{4 \cdot 47}{98} \cdot 58 \cdot 10 \text{ килограммовъ} = 26,4 \text{ килограмма.}$$

*В* есть модуль сжимаемости или растяжимости изотропнаго тѣла и выражаетъ величину отношенія между давлением, которое надо приложить къ каждой единицѣ наружной поверхности тѣла, чтобы сообщить ему одинаковое линейное сжатіе по всемъ направленіямъ, и величиною получающагося тогда кубическаго сжатія единицы объема тѣла; обратно, для произведенія такого кубическаго расширенія надо приложить такое же натяженіе къ каждой единицѣ поверхности. Величина модуля сжимаемости тоже выражается динам на квадратный сантиметръ, такъ какъ кубическое сжатіе и расширеніе единицы объема выражается числомъ отвлеченнымъ.

Такъ, для нѣкотораго образца стали:

$$B = 1,84 \cdot 10^{12} \frac{\text{дин}}{(\text{сантим})^2};$$

для того, чтобы произвести кубическое сжатіе въ 0,00001, придется приложить къ каждому квадратному миллиметру наружной поверхности слѣдующее давление въ килограммахъ:

$$\frac{1,84}{98} 10 \text{ килогр.} = 0,188 \text{ килограмма.}$$

*Е*, модуль упругости, имѣетъ слѣдующее значеніе. Если къ основаніямъ призматическаго тѣла будутъ приложены нормальныя натяженія или давления, а къ боковой поверхности не будетъ приложено вѣншихъ напряженій, то призма будетъ растягиваться (при натяженіяхъ) или сжиматься (при давленіяхъ). Отношеніе между величиною натяженія, приложеннаго къ единицѣ оснований призмы и величиною получающагося тогда растяженія единицы длины призмы представляетъ величину *Е*; для произведенія линейнаго сжатія той же величины надо приложить такіа же давленія. Такъ какъ линейное растяженіе единицы длины выражается отвлеченнымъ числомъ, то измѣренія модуля упругости тѣ же что и прочихъ двухъ модулей.

Для нѣкотораго образца стали:

$$E = 2,14 \cdot 10^{11} \frac{\text{дин}}{(\text{сантим})^2}.$$

Чтобы произвести линейное растяженіе въ 0,001 этого тѣла, придется приложить къ каждому квадратному миллиметру оснований призмы слѣдующее натяженіе въ килограммахъ:

$$\frac{2,14}{98} 10^3 \text{ килогр.} = 21,8 \text{ килограмма.}$$

*κ* есть отношеніе величины поперечнаго линейнаго сжатія къ величинѣ продольнаго растяженія или отношеніе величины поперечнаго линейнаго расши-

нения къ величинѣ продольнаго линейнаго сжатія, происходящихъ въ призмы при состоятеляхъ только что указанныхъ, т. е. при растягиваніи или сжатіи призмы напряженіями, приложенными къ основаніямъ ея;  $\kappa$  есть отвлеченная дробь.

Зная двѣ изъ четырехъ величинъ  $K, R, E, \kappa$  (\*), можно вычислить двѣ другія по слѣдующимъ формуламъ:

$$E = \frac{9RK}{3R + K} = 3R(1 - 2\kappa) = 2K(1 + \kappa) \dots\dots\dots (186)$$

$$R = \frac{E}{3(1 - 2\kappa)} = \frac{2K}{3} \frac{1 + \kappa}{1 - 2\kappa} = \frac{EK}{3(3K - E)} \dots\dots\dots (187)$$

$$\kappa = \frac{3R - 2K}{2(3R + K)} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E}{3R} \right) = \frac{E}{2K} - 1 \dots\dots\dots (188)$$

$$K = \frac{E}{2(1 + \kappa)} = \frac{3R}{2} \frac{1 - 2\kappa}{1 + \kappa} = \frac{3ER}{9R - E} \dots\dots\dots (189)$$

Другой коэффициентъ упругости изотропнаго тѣла можетъ быть выраженъ въ двухъ изъ четырехъ предыдущихъ величинъ такими формулами:

$$\begin{aligned} B - N^0 &= R - \frac{2}{3} K = 3R \frac{3R - E}{9R - E} = \frac{3R\kappa}{1 + \kappa} = \\ &= K \frac{E - 2K}{3K - E} = \frac{2K\kappa}{1 - 2\kappa} = \frac{E\kappa}{(1 - 2\kappa)(1 + \kappa)} \dots\dots\dots (190) \end{aligned}$$

Зная оба коэффициента упругости можемъ вычислить предварительное напряженіе  $N^0$ :

$$N^0 = \frac{5}{6} K - \frac{R}{2} = \frac{K}{2} \frac{1 - 4\kappa}{1 - 2\kappa} = \frac{K(5K - 2E)}{2(3K - E)} \dots\dots\dots (191)$$

\*). Приводимъ здѣсь указаніе относительно того, какими буквами и знаками обозначены эти величины въ нѣкоторыхъ наиболѣе авторитетныхъ новѣйшихъ сочиненіяхъ и статьяхъ по теоріи упругости:

	$K$	$B - N^0$	$E$	$R$	$\kappa$
Cauchy, Exercices <sup>1)</sup> .....	$\frac{k}{2}$	$K$	—	—	—
Poisson, Mémoires <sup>2)</sup> .....	$k + K$	$k - K$	—	—	—
Lamé, Théorie de l'élasticité <sup>3)</sup> ...	$\mu$	$\lambda$	$E$	$\frac{1}{\alpha}$	—
Saint-Venant, Résumé et Mémoires <sup>4)</sup> .....	$e, \frac{k}{2}, G$	$e', K$	$E$	—	—
Clebsch, Elasticität <sup>5)</sup> .....	$F$	—	$E$	—	$\mu$
Kirchhoff, Mechanik <sup>6)</sup> .....	$K$	$2K\theta$	—	—	$\frac{\mu}{\tau}$
Thomson, Natural philosophy <sup>7)</sup> .	$n$	—	$M$	$k$	$\tau$
Weyrauch, Theorie elastischer Körper.....	$G$	—	$E$	—	$\frac{1}{\varepsilon}$

<sup>1)</sup> Cauchy, Exercices de mathématique, III-me année, 1828.

<sup>2)</sup> Poisson, Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques; Mémoires de l'Institut. T. VIII, 1829. Journ. de l'école polytechn. Cahier 20, 1831.

<sup>3)</sup> Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, 1852.

<sup>4)</sup> Saint-Venant, Résumé des Leçons. . ., Resistance des corps solides p. Navier, 1864; Mémoire sur la torsion des prismes Savants étrangers, T. XIV, 1853. Mémoire sur la flexion des prismes (Journal des mathématiques, p. Liouville, T. I, série 2) 1853.

<sup>5)</sup> Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper. 1862.

<sup>6)</sup> Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik. 1876; Gesamnte Abhandlungen.

<sup>7)</sup> W Thomson and Tait, Treatise on Natural Philosophy, Vol II, 1883.

Отсюда видно, что если бы предварительное напряженіе было равно нулю, то было бы:

$$R = \frac{5}{3} K, E = \frac{5}{2} K = \frac{3}{2} R, \kappa = 0,25 \dots \dots \dots (192)$$

Приводимъ таблицу величинъ модулей для различныхъ тѣлъ, извлеченную изъ книги: Everett, Units and physical constants. 1879.

	Плотность $\sigma$	$K$	$R$	$E$	$\kappa$
Флинтгласъ . . . . .	2,942	$0,240 \cdot 10^{12}$	$0,415 \cdot 10^{12}$	$0,603 \cdot 10^{12}$	0,258
Латунь (провол.) . .	8,471	$0,366 \cdot 10^{12}$	—	$1,075 \cdot 10^{12}$	0,469 ?
Сталь . . . . .	7,849	$0,819 \cdot 10^{12}$	$1,841 \cdot 10^{12}$	$2,139 \cdot 10^{12}$	0,310
Желѣзо . . . . .	7,677	$0,769 \cdot 10^{12}$	$1,456 \cdot 10^{12}$	$1,963 \cdot 10^{12}$	0,275
Чугунъ . . . . .	7,235	$0,532 \cdot 10^{12}$	$0,964 \cdot 10^{12}$	$1,349 \cdot 10^{12}$	0,267
Мѣдь . . . . .	8,843	$0,447 \cdot 10^{12}$	$1,684 \cdot 10^{12}$	$1,234 \cdot 10^{12}$	0,378

Если изотропное тѣло будетъ подвергнуто одинаковому (по всей его поверхности) давленію или натяженію величины  $P$  (на единицу поверхности), то каждая единица его объема получитъ кубическое сжатіе или расширеніе величины ( $P:R$ ), причемъ линейное сжатіе или растяженіе по всемъ направленіямъ будетъ равно ( $P:3R$ ).

Если изотропное тѣло, имѣющее видъ призмы или цилиндра, будетъ подвергнуто натяженіямъ, приложеннымъ къ его основаніямъ, причемъ къ каждой боковой поверхности будетъ приложено натяженіе  $P$ , то линейное удлинненіе единицы длины, параллельной одной призмы, будетъ равно ( $P:R$ ), линейное сжатіе единицы длины по всякому направленію, перпендикулярному къ одной призмы, будетъ равно ( $P\kappa:E$ ) и вещество тѣла получитъ кубическое расширеніе равное ( $P:3R$ ) на единицу объема. Если нормальныя напряженія  $P$  на основаніяхъ призмы будутъ давленіями, то линейное продольное сжатіе будетъ ( $P:E$ ), линейное поперечное расширеніе будетъ ( $P\kappa:E$ ) и вещество тѣла получитъ кубическое сжатіе ( $P:3R$ ) на единицу объема.

### § 38. Формулы Грина, выражающія зависимость между напряженіями и давленіями.

Формулы (153) стр. 93, выражающія зависимость между напряженіями и деформациями тѣла, были выведены Коши\*, такимъ образомъ, какъ показано въ § 34-мъ. Въ § 35 приведенъ другой выводъ этихъ формулъ, исходя изъ начала д'Аламбера.

Гринъ далъ другія формулы, выражающія зависимость между напряженіями и деформациями\*\*). Эти формулы онъ выводилъ изъ начала д'Аламбера, предполагая, что потенциалъ частичныхъ силъ, дѣйствующихъ на каждый элементъ деформируемаго тѣла, есть функція отъ коэффициентовъ чистой деформации элемента, такъ что потенциалъ всѣхъ частичныхъ силъ на себя будетъ:

$$U = - \iiint \tau (e_1, e_2, e_3, 2g_1, 2g_2, 2g_3) dx dy dz. \dots \dots (193)$$

\*) Cauchy. Exercices de Mathematiques. 4 me annee

\*\*) George Green. On the Laws of the Reflexion and Refraction of Light at the common surface of two non-crystallized Media. On the Propagation of Light in crystallized Media. Mathematical Papers of G. Green. edited by J. Leers, Lond. 1871. Macmillan and Co.



гдѣ

$$e_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad 2g_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2g_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2g_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Разложивъ  $\varphi$  по возрастающимъ степенямъ ничтожно-малыхъ величинъ  $e$  и  $g$  и пренебрегая членами, заключающими третью и высшія степени ихъ, можемъ въ выраженіи (193) оставить вмѣсто  $\varphi$  сумму:  $\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2$ , гдѣ  $\varphi_0$  не заключаютъ величинъ  $e$  и  $g$ ,  $\varphi_1$  есть линейная функція, а  $\varphi_2$  — однородная функція второй степени.

Поэтому варьация отъ  $\Pi$  выразится такъ:

$$\delta \Pi = - \iiint (\delta \varphi_1 + \delta \varphi_2) dx dy dz.$$

Здѣсь  $\delta \varphi_1$  есть линейная функція отъ  $\delta e_1, \delta e_2, \delta e_3, 2\delta g_1, 2\delta g_2, 2\delta g_3$  съ постоянными коэффициентами. Когда тѣло находится въ предварительномъ состояніи въ покой, при отсутствіи всякихъ вѣннихъ силъ и напряженій, тогда должно быть:

$$0 = \iiint \delta \varphi_1 dx dy dz$$

и слѣдовательно коэффициенты первыхъ степеней величинъ  $e$  и  $g$  должны быть равны нулю.

Изъ этого слѣдуетъ, что  $\delta \Pi$  должна заключать подъ интеграломъ варьацию отъ функціи  $\varphi_2$  второй степени и однородной относительно величинъ  $e$  и  $g$ , съ постоянными коэффициентами.

И такъ по Грину:

$$\delta \Pi = - \iiint \delta \varphi_2 dx dy dz, \dots \dots \dots (194)$$

гдѣ:

$$\begin{aligned} 2\varphi_2 = & A_1 e_1^2 + 2B_1 e_1 e_2 + 2B_2 e_1 e_3 + 4H_1 e_1 g_1 + 4K_3 e_1 g_2 + 4K_1 e_1 g_3 + \\ & + A_2 e_2^2 + 2B_1 e_2 e_3 + 4L_3 e_2 g_1 + 4H_2 e_2 g_2 + 4K_1 e_2 g_3 + \\ & + A_3 e_3^2 + 4L_1 e_3 g_1 + 4L_1 e_3 g_2 + 4H_3 e_3 g_3 + \\ & + 4G_1 g_1^2 + 8F_3 g_1 g_2 + 8F_2 g_1 g_3 + \\ & + 4G_2 g_2^2 + 8F_1 g_2 g_3 + \\ & + 4G_3 g_3^2. \end{aligned}$$

Сравнивъ данное Гриноу выраженіе для  $\delta \Pi$  съ выраженіемъ (166. bis), приведеннымъ въ параграфъ 35-мъ на стр. 99 (гдѣ  $Q$  есть сумма, выражаемая формулою (167 bis)), можемъ заключить, что Гриновы формулы для напряженій имѣютъ слѣдующій видъ:

$$N_1 = A_1 \varepsilon_1 + B_3 \varepsilon_2 + B_2 \varepsilon_3 + 2H_1 g_1 + 2K_3 g_2 + 2K_2 g_3 \dots (195, a)$$

$$N_2 = B_3 \varepsilon_1 + A_2 \varepsilon_2 + B_1 \varepsilon_3 + 2L_3 g_1 + 2H_2 g_2 + 2K_1 g_3 \dots (195, b)$$

$$N_3 = B_2 \varepsilon_1 + B_1 \varepsilon_2 + A_3 \varepsilon_3 + 2L_2 g_1 + 2L_1 g_2 + 2H_3 g_3 \dots (195, c)$$

$$T_1 = H_1 \varepsilon_1 + L_3 \varepsilon_2 + L_2 \varepsilon_3 + 2G_1 g_1 + 2F_3 g_2 + 2F_2 g_3 \dots (195, d)$$

$$T_2 = K_3 \varepsilon_1 + H_2 \varepsilon_2 + L_1 \varepsilon_3 + 2F_3 g_1 + 2G_2 g_2 + 2F_1 g_3 \dots (195, e)$$

$$T_3 = K_2 \varepsilon_1 + K_1 \varepsilon_2 + H_3 \varepsilon_3 + 2F_2 g_1 + 2F_1 g_2 + 2G_3 g_3 \dots (195, f)$$

и заключаютъ въ себѣ 21 коэффициентъ упругости.

1) Если вещество тѣла имѣетъ симметричное строеніе относительно плоскостей параллельныхъ плоскости  $YZ$ , то выраженіе  $\Phi$ , не должно измѣнить своего вида при перемѣнѣ направленія оси  $X$  въ противоположное; но если мы сдѣлаемъ эту перемѣну, не измѣняя направленій положительныхъ осей  $Y$  и  $Z$ , то это повлечетъ за собою измѣненіе знаковъ величинъ  $\alpha$  и  $\alpha$ , а слѣдовательно измѣненіе знаковъ величинъ  $g_2$  и  $g_3$ . Поэтому, въ случаѣ такой симметріи, коэффициенты упругости:  $K_1, K_2, K_3, H_2, H_3, L_1, F_2, F_3$  должны быть равны нулю.

2) Если существуетъ симметрия вещества также и относительно плоскостей параллельныхъ плоскости  $ZX$ , то должны быть равны нулю, кромѣ вышеперечисленныхъ, еще коэффициенты:  $H_1, L_2, L_3, F_1$ , такъ что тогда останется 9 коэффициентовъ:

$$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, G_1, G_2, G_3,$$

откуда видно, что тогда и плоскости параллельныя  $XU$  суть тоже плоскости симметріи.

3) Когда строеніе тѣла имѣетъ симметрію вокругъ осей, параллельныхъ оси  $Z$ -овъ, то тогда, вследствие тождества строенія параллельно осямъ  $X$  и  $Y$ , должны быть слѣдующія равенства между коэффициентами:  $A_1 = A_2, B_1 = B_2, G_1 = G_2$ . Кромѣ того величины коэффициентовъ упругости не должны измѣняться при поворотѣ плоскостей  $ZU$  и  $ZX$  на какой бы то ни было уголъ вокругъ оси  $Z$ -овъ, а, въ частности, на уголъ въ  $45^\circ$ . Сдѣлавъ такой поворотъ и означивъ новыя оси черезъ  $\Xi, \Upsilon$ , координаты относительно этихъ осей черезъ  $\xi, \eta$ , проэкціи на нихъ перемѣщенныхъ точекъ черезъ  $\mu$  и  $\nu$  и линейныя удлиненія по нимъ — черезъ  $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2$ , а коэффициенты сдвиговъ при новыхъ осяхъ — черезъ  $g'_1, g'_2, g'_3$ , мы найдемъ, что:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2}{2} - g'_3, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2}{2} + g'_3, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon'_3$$

$$g_1 = \frac{g'_2 + g'_1}{\sqrt{2}}, \quad g_2 = \frac{g'_2 - g'_1}{\sqrt{2}}, \quad 2g_3 = \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2;$$

и тогда окажется, что:  $2G_3 = A_1 - B_3$ .

Поэтому, въ случаѣ симметріи строенія тѣла вокругъ направленій, параллельныхъ оси  $Z$ -овъ, функція  $\Phi_3$  будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$2\Phi_3 = B_3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + A_3 \varepsilon_3^2 + 2B (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \varepsilon_3 + \\ + 4G (g_1^2 + g_2^2) + 2G_3 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2g_3^2) \dots (196)$$

4) Если строение вещества не только симметрично относительно трех систем плоскостей, параллельных плоскостям координат, но кроме того одинаково по направлениям параллельным всем трем осям, то должны существовать следующие равенства между коэффициентами:

$$A_1 = A_2 = A_3, B_1 = B_2 = B_3, G_1 = G_2 = G_3;$$

т. е. где:

$$3\varphi_2 = A(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) + 4G(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) + 2B(\epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_3\epsilon_1 + \epsilon_1\epsilon_2). \quad (197)$$

5) Наконец, в случае изотропии должно быть:  $2G = A - B$ ; останется только один коэффициент, в качестве которых можно удержать  $B$  и  $G$ ; тогда функция  $\varphi_2$  будет иметь следующий вид:

$$2\varphi_2 = B\theta^2 + 2G(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + 2g_1^2 + 2g_2^2 + 2g_3^2) \dots \dots (198)$$

Выражения (195) для изотропного тела получать поэтому такой вид:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 2G\epsilon_1 + B\theta, & T_1 &= 2Gg_1 \\ N_2 &= 2G\epsilon_2 + B\theta, & T_2 &= 2Gg_2 \\ N_3 &= 2G\epsilon_3 + B\theta, & T_3 &= 2Gg_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (199)$$

Разница между этими выражениями и выражениями (175) заключается только в том, что здесь нет предварительного напряжения  $N^0$ , вместо  $K$  здесь  $G$  и вместо  $B - N^0$  здесь  $B$ ; поэтому  $G$  в формулах (199) означает модуль твердости  $K$ , а  $B$  равняется  $(R - \frac{2}{3}K)$ .

### § 39. Сравнение формул Коши с формулами Грина.

Сравнив формулы Коши, полученные в §§ 34, 35 и 36, с формулами Грина, полученными в предыдущем параграфе, мы должны обратить внимание на то обстоятельство, что в первые входят  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  — угловые перемещения элементов вещества, между тем как эти величины не вошли в формулы Грина вследствие сделанного при их выводѣ предположения, что потенциал частичных сил каждого элемента независит от его углового перемещения.

Это различие между формулами Грина и Коши теряется, когда их применяемъ къ изотропно-упругимъ теламъ или къ теламъ имѣющимъ такъ называемую кубическую изотропию, то есть къ темъ, строение которыхъ тождественно по направлениямъ параллельнымъ тремъ осямъ координатъ и объ которыхъ было говорено в пунктахъ 4-хъ параграфовъ 36-го и 38-го.

По отношенію къ этимъ теламъ остается еще одно различіе между формулами Коши и Грина: въ первые входитъ предварительное напряжение  $N^0$ , которое не входитъ во вторые.

Въ настоящее время представляется еще пока преждевременнымъ входить въ теоретическое изслѣдованіе вліянія предварительныхъ напряженій и поверхностнаго слоя въ явленіяхъ упругости. Въ слѣдующихъ главахъ этой книги я буду пользоваться преимущественно формулами Грина.

## VII.

### О равновѣсіи упругаго тѣла.

#### § 40. Величины, опредѣляющія состояніе деформациі тѣла.

Въ параграфѣ 38-мъ при выводѣ формулъ Грина было предположено, что потенциалъ частичныхъ силъ каждаго элемента тѣла зависитъ только отъ величинъ  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 2g_1, 2g_2, 2g_3$ , опредѣляющихъ чистую деформацию.

Посмотримъ теперь, насколько деформированное состояніе всего тѣла будетъ опредѣлено, если будутъ даны величины  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 2g_1, 2g_2, 2g_3$ , въ видѣ функций отъ  $x, y, z$ , для всѣхъ точекъ тѣла.

Положимъ, что мы нашли нѣкоторыя функціи  $u, v, w$  отъ  $x, y, z$ , удовлетворяющія уравненіямъ:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & 2g_1 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y}, & 2g_2 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{\partial w}{\partial z}, & 2g_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (200)$$

Спрашивается, нельзя ли найти еще какія либо другія функціи  $u_1, v_1, w_1$  отъ  $x, y, z$ , удовлетворяющія тѣмъ же дифференціальнымъ уравненіямъ, и отличающіяся отъ первыхъ?

Если это возможно, то разности между ними, то есть  $(u - u_1), (v - v_1), (w - w_1)$ , которыя мы означимъ черезъ  $u_2, v_2$ , и  $w_2$ , должны быть функціями отъ  $x, y, z$ , удовлетворяющими слѣдующимъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (201)$$

Взявъ отъ перваго изъ уравненій второй строки производную по  $x$ , отъ втораго — производную по  $y$  и отъ третьяго — производную по  $z$ , будемъ имѣть:

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial z} = 0.$$



Сложивъ первыя два изъ полученныхъ сейчасъ равенствъ и вычтя третье, найдемъ, что вторая производная отъ  $w_2$  по  $x$  и по  $y$  равна нулю; поэтому должны быть также равны нулю и двѣ другія вторыя производныя, заключающіяся въ составленныхъ сейчасъ равенствахъ.

Далѣе, путемъ дифференцированія, изъ уравненій (201) окажется, что всѣ безъ исключенія вторыя производныя отъ  $u_2, v_2, w_2$  по  $x, y, z$ , равны нулю. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ первыя производныя отъ  $u_2, v_2, w_2$  по  $x, y, z$  суть величины постоянныя.

Такъ какъ, на основаніи уравненій (201), три изъ этихъ частныхъ производныхъ перваго порядка равны нулю, а остальные три по двѣ равны и прямо-противоположны, то функціи  $u_2, v_2, w_2$ , удовлетворяющія уравненіямъ (201), должны имѣть слѣдующій видъ:

$$u_2 = a + z\beta - y\gamma, \quad v_2 = b + x\gamma - z\alpha, \quad w_2 = c + y\alpha - x\beta \dots (202)$$

гдѣ  $a, b, c$  суть величины  $(u_2)_0, (v_2)_0, (w_2)_0$  для точки, предварительныя координаты которой суть  $x = 0, y = 0, z = 0$ , а постоянныя  $\alpha, \beta, \gamma$  имѣютъ слѣдующія значенія:

$$2\alpha = \frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \quad 2\beta = \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad 2\gamma = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}.$$

т. е. это суть нѣкоторыя угловыя перемѣщенія, одинаковыя для всѣхъ элементовъ тѣла.

Величины  $u_2, v_2, w_2$  суть проэкціи тѣхъ перемѣщеній, которыя совершаютъ точки тѣла при произвольномъ поступательномъ перемѣщеніи  $a, b, c$ , соединенномъ съ поворотомъ всего тѣла на ничтожно-малый уголъ вокругъ произвольной оси.

Отсюда видно, что функціи отъ  $x, y, z$ , выражающія  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, 2g_1, 2g_2, 2g_3$ , поименно опредѣляютъ некоторую ничтожно-малую деформацию тѣла.

Если закрѣпимъ: какую либо точку тѣла (примемъ ее за начало координатъ), касательную къ какой либо линіи, проведенной черезъ эту точку (направленіе касательной примемъ за ось X-овъ) и касательную плоскость къ какой либо поверхности, проведенной черезъ ту точку и черезъ ту линію (примемъ эту плоскость за плоскость XY), то этимъ будетъ обусловлено, что  $a, b, c, \alpha, \beta$  и  $\gamma$  должны быть равны нулю. Эти условія можно выразить нижеслѣдующимъ образомъ, взявъ за оси координатъ главныя оси деформаций закрѣпляемаго элемента.

При  $x = 0, y = 0, z = 0$  должны быть:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0 \\ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 &= 0, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 = 0, \quad \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (203)$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ закрѣпленная касательная должна совпадать съ осью X-овъ, то перемѣщенія по оси Y-овъ точекъ, взятыхъ на линіи вблизи начала координатъ, должны быть безконечно-малыми величинами высшихъ порядковъ малости, т. е.  $x \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_0$  должно быть равно нулю; подобнымъ же образомъ увидимъ, что закрѣпленіе касательной плоскости требуетъ, что производныя отъ  $w$  по  $x$  и по  $y$  были бы равны нулю въ началѣ координатъ.

**§ 41. Дифференціальныя уравненія второго порядка, которымъ должны удовлетворять  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 2g_1, 2g_2, 2g_3$ .**

Если бы мы имѣли не только  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 2g_1, 2g_2, 2g_3$ , но и еще  $2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3$ , выраженными въ функціяхъ отъ  $x, y, z$ , то пришлось-бы опредѣлить  $u, v, w$  по имѣющимся выраженіямъ ихъ первыхъ производныхъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon_1, & \frac{\partial v}{\partial x} &= g_2 + \omega_2, & \frac{\partial w}{\partial x} &= g_1 - \omega_1, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= g_3 - \omega_3, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \varepsilon_2, & \frac{\partial w}{\partial y} &= g_1 + \omega_1, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= g_2 - \omega_2, & \frac{\partial v}{\partial z} &= g_1 - \omega_1, & \frac{\partial w}{\partial z} &= \varepsilon_3. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (204)$$

Функціи  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, g_1, g_2, g_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$  не могутъ быть заданы по произволу. для того, чтобы  $\varepsilon_1, g_3 - \omega_3, g_2 + \omega_2$  были дѣйствительно частными производными по  $x, y, z$  отъ одной и той же функціи  $u$ , необходимо, чтобы онѣ удовлетворяли слѣдующимъ тремъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\frac{\partial g_3}{\partial x} - \frac{\partial \omega_3}{\partial z} = \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} = \frac{\partial g_3}{\partial x} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \dots (205, 1)$$

Подобнымъ же образомъ составимъ еще шесть дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, которымъ должны удовлетворять эти функціи:

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z} = \frac{\partial g_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x} = \frac{\partial g_3}{\partial z} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z}, \quad \frac{\partial g_3}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} \dots (205, 2)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial x} = \frac{\partial g_2}{\partial z} - \frac{\partial \omega_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial y} = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \dots (205, 3)$$

Такова зависимость между частными производными тѣхъ функцій, которыми могутъ быть  $\varepsilon, g$  и  $\omega$ .

Эти уравненія (205) могутъ быть рѣшены относительно частныхъ производныхъ отъ  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ; сдѣлавъ это, получимъ восемь слѣдующихъ равенствъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} &= \frac{\partial g_1}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z}, & \frac{\partial \omega_2}{\partial z} &= \frac{\partial g_2}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial x}, & \frac{\partial \omega_3}{\partial x} &= \frac{\partial g_3}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial y} - \frac{\partial g_1}{\partial z}, & \frac{\partial \omega_2}{\partial x} &= \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} - \frac{\partial g_2}{\partial x}, & \frac{\partial \omega_3}{\partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} - \frac{\partial g_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial x} &= \frac{\partial g_2}{\partial y} - \frac{\partial g_3}{\partial z}, & \frac{\partial \omega_2}{\partial y} &= \frac{\partial g_3}{\partial z} - \frac{\partial g_1}{\partial x} \end{aligned}$$

и еще одно, девятое, которое можно представить такъ:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (206)$$

Три изъ восьми первыхъ равенствъ выражаютъ частныя производныя отъ  $\omega_1$  по  $z, x$ . Составивъ изъ нихъ два выраженія для  $\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y \partial z}$  и приравнявъ ихъ, получимъ дифференціальное уравненіе (207, 1), приведенное ниже; составивъ же по два выраженія для  $\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z \partial x}$  и для  $\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial y}$  мы получимъ уравненія (208, 3) и (208, 2). Далѣе, подобно же образомъ отъ выраженій частныхъ производныхъ отъ  $\omega_2$  по  $x, y$  и  $z$  получимъ дифференціальныя уравненія (207, 2), (208, 1) и опять полученное уже (208, 3). Наконецъ, составивъ два выраженія для  $\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x \partial y}$ , получимъ дифференціальное уравненіе (207, 3).

$$2 \frac{\partial^2 g_1}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_3}{\partial y^2} \dots\dots\dots (207, 1)$$

$$2 \frac{\partial^2 g_2}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \epsilon_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial z^2} \dots\dots\dots (207, 2)$$

$$2 \frac{\partial^2 g_3}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_2}{\partial x^2} \dots\dots\dots (207, 3)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g_3}{\partial z \partial x} \dots\dots\dots (208, 1)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g_3}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (208, 2)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g_3}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g_1}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial y \partial z} \dots\dots\dots (208, 3)$$

Этимъ шести совокупнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ второго порядка должны удовлетворять тѣ функціи, которыя должны выражать собою линейныя удлинненія и сдвиги элементовъ сплошнаго тѣла, получившаго ничтожно-малую деформацию.

## § 42. Уравненія равновѣсія упругаго тѣла.

Для того, чтобы упругое тѣло могло быть въ деформированномъ состояніи въ покоѣ, необходимо, чтобы къ нему приложены были объемныя силы и напряженія, опредѣляемыя изъ слѣдующихъ уравненій равновѣсія упругаго тѣла

$$\left. \begin{aligned} \sigma X + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} &= 0, \\ \sigma Y + \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} &= 0, \\ \sigma Z + \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (169, bis)$$

и (170) стр. 100 § 35-го.

Уравненія (169, bis) получены изъ уравненій (169) стр. 100 параграфа 35-го, положивъ въ нихъ  $u, v, w$  независящими отъ времени и отбросивъ члены, заключающіи произведенія изъ величинъ  $\epsilon$  и  $g$  и ихъ частныхъ производныхъ (пренебрегая таковыя членами мы замѣнили:  $x, y, z$  и  $\sigma_1$  черезъ  $x, y, z$  и  $\sigma$ ).

Если будутъ заданы силы и напряженія, приложенныя къ упругому тѣлу, то уравненія (169, bis) и (170) вмѣстѣ съ дифференціальными уравненіями (207, 208, 200)

и условіями (203) должны послужить для опредѣленія того деформированнаго состоянія, въ которомъ должно находиться упругое тѣло подѣ влияніемъ этихъ силъ.

### § 43. Объ устойчивости внутренняго равновѣсія упругаго тѣла.

Если въ тѣлу неприменено никакихъ объемныхъ силъ и дѣйствіемъ вѣшнихъ напряженій оно приведено въ деформированное состояніе, въ которомъ всѣ точки его поверхности закрѣплены неподвижно, то внутреннее равновѣсіе его, по началу возможныхъ перемѣщеній, должно быть таково, чтобы варьяція отъ потенціала II всѣхъ частичныхъ силъ равнялась нулю.

Для устойчивости же равновѣсія консервативной системы необходимо, чтобы потенціалъ ея былъ максимумъ въ положеніи равновѣсія \*).

По формуламъ же Грина (§ 35) потенціалъ упругаго тѣла, за вычетомъ членовъ нулевой степени относительно  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, g_1, g_2, g_3$ , заключаетъ подѣ интеграломъ однородную функцію второй степени относительно этихъ величинъ.

Для того, чтобы интегралъ:

$$\Pi - \Pi_0 = \iiint \varphi_2 \, dx \, dy \, dz. \dots \dots \dots (209)$$

былъ максимумъ, при всякомъ видѣ закрѣпленной поверхности, необходимо, чтобы  $\varphi$  была такою однородною функціею втораго порядка отъ шести вышесказанныхъ величинъ, которая была бы положительною при всякихъ значеніяхъ этихъ величинъ.

Это требуетъ, чтобы величины коэффициентовъ упругости удовлетворяли нѣкоторымъ условіямъ, число которыхъ при отсутствіи симметріи въ строеніи можетъ достигать шести; эти условія таковы \*\*):

$$A_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_2 \\ B_3 & A_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_2 & B_3 \\ B_3 & A_2 & B_1 \\ B_2 & B_1 & A_3 \end{vmatrix} > 0, \text{ и т. д.}$$

Въ случаѣ кубической изотропіи эти условія будутъ:

$$A > 0, \quad A^2 - B^2 > 0, \quad A^3 - 3AB^2 + 2B^3 > 0, \quad G > 0.$$

Въ случаѣ полной изотропіи, если вмѣсто  $A$  подставимъ  $2G + B$ , то, на основаніи четвертаго условія, найдемъ изъ третьяго, что должно быть  $2G + 3B > 0$ ; пер-

\*) Стр. 786 кинетической части курса аналитической механики.

\*\*) Всякая однородная функція втораго порядка отъ сколькихъ бы то ни было величинъ  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{k,i} x_i x_k$$

можетъ быть, какъ показалъ Якоби, приведена къ слѣдующему виду

$$f = \frac{U_1^2}{p_1} + \frac{U_2^2}{p_1 p_2} + \dots + \frac{U_i^2}{p_{i-1} p_i} + \dots + \frac{U_n^2}{p_{n-1} p_n},$$



и второе условіе (которыя получают такой видъ:  $2G + B > 0$ ,  $G + B > 0$ ) тогда, и положительных  $G$  и  $2G + 3B$ , будутъ удовлетворены и подавно.

Такъ какъ  $3B = R - 2K$  и  $G = K$ , то условия устойчивости изотропнаго тѣла требуютъ, чтобы оба модуля  $K$  и  $R$  (твердости и сжимаемости) были положительными.

Если коэффициенты упругости удовлетворяютъ условіямъ устойчивости, то при приложенной поверхности и при отсутствіи объемныхъ силъ тѣло можетъ находиться только въ одномъ внутреннемъ состояніи равновѣсія. Чтобы убѣдиться въ этомъ, положимъ, что существуютъ два такіа состоянія деформаций, одно, при которомъ  $u, v, w, \epsilon$  и  $g$  суть:

$$(u)_1, (v)_1, (w)_1, (\epsilon_1)_1, (\epsilon_2)_1, \dots (g_3)_1$$

и другое, при которомъ онѣ суть:

$$(u)_2, (v)_2, (w)_2, (\epsilon_1)_2, (\epsilon_2)_2, \dots (g_3)_2;$$

а поверхности тѣла обѣ системы значеній тождественны.

Означимъ черезъ  $u', v', w', \epsilon_1', \dots g_3'$  разности ихъ, т. е.:  $(u)_2 - (u)_1, (v)_2 - (v)_1, \dots$  и т. д. Обѣ системы величинъ  $\epsilon, g$  должны удовлетворять уравненіямъ равновѣсія, а потому разности ихъ должны удовлетворять уравненіямъ:

$$\frac{\partial N_1'}{\partial x} + \frac{\partial T_1'}{\partial y} + \frac{\partial T_2'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T_3'}{\partial x} + \frac{\partial N_2'}{\partial y} + \frac{\partial T_1'}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial T_2'}{\partial x} + \frac{\partial T_1'}{\partial y} + \frac{\partial N_2'}{\partial z} = 0,$$

гдѣ  $N_1', N_2', \dots T_3'$  есть то, во что обратить  $N_1, N_2, \dots T_3$  черезъ замѣну величинъ  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots g_3$  величинами  $\epsilon_1', \epsilon_2', \dots g_3'$ .

Помноживъ первое изъ этихъ уравненій на  $u'$ , второе на  $v'$ , третье на  $w'$ , взявъ сумму, помножимъ на элементъ объема и возьмемъ интегралъ по всему объему; произведя

гдѣ  $p_i$  и  $U_i$  суть слѣдующіе определители:

$$p_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1i} & a_{2i} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix}, \quad U_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1, i-1} & \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2, i-1} & \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1i} & a_{2i} & \dots & a_{i, i-1} & \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{vmatrix}$$

См. статью: Über eine elementare Transformation eines in Bezug auf jedes von zwei Variablen-systemen linearen und homogenen Ausdrucks. Въ Jacobi's gesammelte Werke. Band III, s 583—590.

Изъ этой формулы видно, что  $f$  будетъ положительною при всякихъ  $x_1, x_2, \dots x_n$ , если:

$$p_1 > 0, p_2 > 0, \dots p_n > 0.$$

затѣмъ преобразованіе интеграловъ по формуламъ § 10 и принявъ во вниманіе, что на поверхности  $u'$ ,  $v'$  и  $w'$  равны нулю, получимъ слѣдующій результатъ:

$$\iiint (N_1' \epsilon_1' + N_2' \epsilon_2' + N_3' \epsilon_3' + 2(T_1' g_1' + T_2' g_2' + T_3' g_3')) dO = 0,$$

или, что то же самое:

$$2 \iiint \Phi_2 (\epsilon_1', \epsilon_2', \epsilon_3', 2g_1', 2g_2', 2g_3') dO = 0$$

Но  $\Phi_2$  есть квадратичная функція, которая при условіи устойчивости не можетъ быть отрицательною, поэтому интегралъ можетъ быть равенъ нулю не иначе, какъ если  $\epsilon_1', \epsilon_2', \epsilon_3', g_1', g_2', g_3'$  равны нулю во всемъ тѣлѣ: слѣдовательно двухъ различныхъ состояній внутренняго равновѣсія быть не можетъ.

При дѣйствіи же вѣшнихъ объемныхъ силъ и при свободѣ наружной поверхности, тѣло, подверженное вѣшнимъ напряженіямъ, можетъ имѣть и неустойчивыя состоянія деформаци и можетъ имѣть нѣсколько положеній равновѣсія.

## VIII.

Нѣкоторые примѣры рѣшенія вопросовъ о равновѣсіи изотропно-упругаго тѣла

### § 14. Однородный изотропный цилиндръ, подвергаемый продольному растяженію или сжатію.

Начнемъ съ изложенія простѣйшаго примѣра, въ которомъ задается деформация тѣла. Этотъ примѣръ уже отчасти былъ рассмотрѣнъ въ § 37-мъ.

Предположимъ, что изотропное тѣло есть призма или цилиндръ, неподверженный объемнымъ силамъ, а только поверхностнымъ напряженіямъ, влѣдствіе дѣйствія которыхъ точки его получили слѣдующія перемѣщенія:

$$u = ax, v = by, w = cz,$$

гдѣ  $a, b, c$  — величины постоянныя. Предполагается, что ось  $X$ -овъ параллельна длинѣ призмы. Требуется опредѣлить, какія напряженія должны быть приложены къ поверхности призмы.

По формуламъ (175) стр. 103-й найдемъ, что напряженія  $T_1, T_2, T_3$  будутъ равны нулю, а  $N_1, N_2, N_3$  таковы:

$$N_1 = 2Ka + B\theta, N_2 = 2Kb + B\theta, N_3 = 2Kc + B\theta,$$

$$\theta = a + b + c, B = R - \frac{2}{3}K,$$

если предполагать предварительное напряженіе  $N^0$  равнымъ нулю.

По формуламъ (170) стр. 100-й мы найдемъ, что въ основаніяхъ призмы, гдѣ  $(nX) = +1$ , должны быть приложены нормальныя напряженія:

$$P_2 = +(2Ka + B\theta), \quad P_1 = -(2Ka + B\theta).$$

Къ боковой же поверхности должны быть приложены слѣдующія напряженія:

$$Y_s = (2Kb + B\theta) \cos (nY), \quad Z_s = (2Kc + B\theta) \cos (nZ).$$

1) Если тѣло имѣетъ видъ прямоугольнаго параллелепипеда (грани котораго параллельны плоскостямъ координатъ), то къ гранямъ его, перпендикулярнымъ къ оси  $Y$ -овъ, должно приложить равномерное нормальное напряженіе  $Q = 2Kb + B\theta$  на единицу поверхности, а къ гранямъ перпендикулярнымъ къ оси  $Z$ -овъ равномерное нормальное напряженіе  $H = 2Kc + B\theta$  на единицу поверхности. Кубическое расширеніе, получаемое при этомъ единицею объема тѣла, опредѣлится изъ равенства:  $P + Q + H = (2K + 3B)\theta$  и окажется равнымъ:

$$\theta = \frac{P + Q + H}{3R}.$$

2) Если мы зададимъ, что  $b = c$ , то, при всякомъ видѣ поперечнаго сѣченія цилиндра или призмы, на боковую поверхность ея должны дѣйствовать нормальныя внѣшнія напряженія  $Q = 2Kb + B\theta$ , гдѣ  $\theta = a + 2b$ . Подъ вліяніемъ продольныхъ напряженій  $P$  и поперечныхъ напряженій  $Q$ , единица объема вещества тѣла получитъ кубическое расширеніе:

$$\theta = \frac{P + 2Q}{3R}.$$

Здѣсь между прочимъ замѣтимъ, что если ко всей поверхности призмы будетъ приложено равномерно нормальное напряженіе  $P$  (т. е. если  $Q = P$ ), то получится кубическое расширеніе ( $P:R$ ); если будетъ приложено нормальное напряженіе  $P$  только къ каждой единицѣ боковой поверхности, то получится кубическое расширеніе: ( $2P:3R$ ) и, наконецъ, если будетъ приложено нормальное напряженіе  $P$  только къ основаніямъ призмы, то получится кубическое расширеніе ( $P:3R$ ).

#### § 45. Крученіе призмъ.

Вопросъ о равновѣсіи призмы, подвергнутой закручиванію вокругъ продольной ея ея, былъ рѣшенъ Санъ-Венаномъ \*) при слѣдующихъ предположеніяхъ:

- 1) что объемныя силы не дѣйствуютъ на призму,
- 2) что  $u = -\alpha zy$ ,  $v = \alpha zx$ , т. е., что различныя сѣченія призмы закручиваются вокругъ продольной оси  $Z$ -овъ на углы, пропорціональные  $z$  ( $\alpha$  — постоянная), но что проэкція сѣченій на плоскость  $XU$  не искажаются,

\*) De Saint-Venant. Sur la torsion des prismes avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en general et le calcul de leur resistance à divers efforts s'exerçant simultanément. 1855. Savants étrangers tome XIV.

3) что на боковыя поверхности призмы внѣшнія напряжения не дѣйствуютъ; призма получаетъ крученіе только вследствие дѣйствія закручивающихъ напряженій, приложенныхъ къ ея оконечностямъ.

При этихъ предположеніяхъ:

$$\varepsilon_1 = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha z, \frac{\partial u}{\partial z} = -\alpha y, \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha z, \varepsilon_2 = 0, \frac{\partial v}{\partial z} = \alpha x;$$

а потому:

$$\theta = \varepsilon_3, 2g_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x, 2g_2 = \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y, 2g_3 = 0$$

$$N_1 = \left(R - \frac{2}{3}K\right) \frac{\partial w}{\partial z}, T_1 = K \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x\right)$$

$$N_2 = \left(R - \frac{2}{3}K\right) \frac{\partial w}{\partial z}, T_2 = K \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y\right)$$

$$N_3 = \left(R + \frac{4}{3}K\right) \frac{\partial w}{\partial z}, T_3 = 0.$$

Уравненія внутренняго равновѣсія будутъ слѣдующія:

$$\left(R + \frac{K}{3}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = 0, \left(R + \frac{K}{3}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0, \dots \dots \dots (210)$$

$$\left(R + \frac{4}{3}K\right) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \dots \dots \dots (211)$$

Изъ уравненій (210) слѣдуетъ, что

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\partial y} = 0,$$

т. е., что производная отъ  $w$  по  $z$  есть функція одного только  $z$ ; пусть  $\frac{\partial w}{\partial z} = f(z)$ .

Эти же самыя уравненія можно еще представить и такъ:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial z} = 0;$$

это значитъ, что частныя производныя отъ  $w$  по  $x$  и по  $y$  суть функція отъ  $x$  и  $y$  не заключающія  $z$ ; поэтому сумма вторыхъ производныхъ отъ  $w$  по  $x$  и по  $y$  есть также функція отъ  $x, y$ ; означимъ ее черезъ  $\Phi(x, y)$ .

Слѣдовательно уравненіе (211) будетъ имѣть такой видъ:

$$\left(\frac{R}{K} + \frac{4}{3}\right) \frac{\partial f(z)}{\partial z} = -\Phi(x, y)$$

я это равенство должно быть справедливо для всѣхъ  $x, y, z$  относящихся ко всѣмъ точкамъ призмы, а между тѣмъ первая часть его заключаетъ только  $z$ , вторая же —



только  $x$  и  $y$ , поэтому обе части равенства должны быть равны одной и той же постоянной; пусть  $f'(z) = 2C$ .

Отсюда слѣдуетъ, что  $f(z) = 2Cz + D$ , гдѣ  $D$  другая постоянная.

Составимъ теперь выраженія напряженій, дѣйствующихъ на какую либо площадку, нормаль которой составляетъ съ осями координатъ углы, имѣющіе косинусы:  $\lambda, \mu, \nu$

$$\left. \begin{aligned} X_n &= B \frac{\partial w}{\partial z} \lambda + K \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y \right) \nu, \\ Y_n &= B \frac{\partial w}{\partial z} \mu + K \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x \right) \nu, \\ Z_n &= K \left( \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y \right) \lambda + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x \right) \mu \right) + \left( R + \frac{4}{3} K \right) \frac{\partial w}{\partial z} \nu. \end{aligned} \right\} \dots (212)$$

Примѣнимъ первыя два изъ этихъ равенствъ къ площадкамъ боковой поверхности призмы; такъ какъ для этихъ элементовъ  $\nu = 0$  и напряженій на нихъ быть не должно, то получимъ требованіе, чтобы  $\frac{\partial w}{\partial x}$  т. е.  $f'(z)$  было равно нулю при всякихъ  $z$ ; это требуетъ, чтобы  $C$  и  $D$  были равны нулю.

Третье изъ равенствъ (212), примененное къ элементамъ боковой поверхности, дастъ равенство:

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y \right) \cos(n, X) + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x \right) \cos(n, Y) = 0, \dots \dots \dots (213)$$

гдѣ  $n$  — наружная нормаль къ боковой поверхности), которому  $w$  должно удовлетворять на боковой поверхности, или, говоря иначе, на контурѣ поперечнаго сѣченія призмы:

Теперь замѣтимъ, что на основаніи всего вышесказаннаго:

$$\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = 0, \theta = 0, 2g_3 = 0,$$

т. е., *растяжений параллельно осямъ нѣтъ, а потому нѣтъ и кубическаго расширения; нѣтъ также сдвиговъ параллельно плоскости  $XU$ .*

Изъ шести напряженій  $N$  и  $T$  неравны нулю только два  $T_1$  и  $T_2$ . Перемѣщеніе  $w$  есть функція отъ  $x$  и  $y$ , удовлетворяющая дифференціальному уравненію съ частными производными втораго порядка:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \dots \dots \dots (214)$$

во всѣхъ точкахъ площади сѣченія и дифференціальному уравненію съ частными производными перваго порядка (213) на контурѣ сѣченія призмы.

Дифференціальному уравненію (214) удовлетворяютъ дѣйствительная и мнимыя части всякой функціи отъ комплексной переменной  $(x + yi)$ . Возьмемъ мнимую часть какой либо такой функціи за  $w$ , а дѣйствительную часть означимъ черезъ  $\psi$ , т. е., пусть:

$$F(x + yi) = \psi(x, y) + iw(x, y),$$

гдѣ  $F$  произвольная функція.

Какъ извѣстно, по свойству функций отъ комплексной переменной:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Такъ какъ функция  $w$  на контурѣ сѣченія должна удовлетворять уравненію (213), то функция  $\psi$  на томъ же контурѣ должна удовлетворять слѣдующему дифференціальному уравненію:

$$-\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \alpha y\right) \cos(n, X) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \alpha x\right) \cos(n, Y) = 0.$$

Означимъ черезъ  $s$  направленіе по контуру сѣченія, означенное на чертежѣ 22-мъ опережною стрѣлкою, и условимся подъ этою бѣговою понимать также направленія касательныхъ, проведенныхъ изъ точекъ  $A$  контура въ его обводу въ такую сторону, чтобы направленіе касательной расположено было относительно направленія нормали  $n$  такимъ же образомъ, какъ положительная ось  $Y$ -овъ расположена относительно положительной оси  $X$ -овъ.

При этомъ условіи очевидно существуетъ слѣдующая зависимость между косинусами угловъ, составляемыхъ направленіями нормали и касательной къ контуру съ осями  $X$ -овъ и  $Y$ -овъ:

$$\cos(n, X) = \cos(s, Y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, Y) = -\cos(s, X) = -\frac{dx}{ds}. \quad (215)$$

Поэтому предыдущее уравненіе, которому  $\psi$  должна удовлетворять на контурѣ, можно представить такъ:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \alpha y\right) \frac{dy}{ds} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \alpha x\right) \frac{dx}{ds} = 0.$$

или же, если представить себѣ, что координаты точекъ контура выражены въ функцияхъ отъ  $s$ , то это уравненіе можно будетъ представить такъ:

$$\frac{d\left(\psi + \frac{\alpha}{2} r^2\right)}{ds} = 0,$$

гдѣ  $r^2 = x^2 + y^2$ . Отсюда слѣдуетъ, что на контурѣ сѣченія функция  $\psi(x, y) + \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2)$  должна быть равна нѣкоторой постоянной: пусть  $C$  есть эта постоянная.

Означимъ функцию  $\psi + \frac{\alpha}{2} r^2$  для краткости черезъ  $\varphi(x, y)$  или просто черезъ  $\varphi$ .

Напряженія  $T_1$ ,  $T_2$  выразятся въ произвольныхъ этой функции:

$$T_1 = K \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad T_2 = -K \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

и поэтому формулы (212) получаютъ теперь слѣдующій видъ:

$$X_n = -K \frac{\partial \varphi}{\partial y} \nu, \quad Y_n = K \frac{\partial \varphi}{\partial x} \nu, \quad Z_n = K \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mu - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \lambda \right) \dots \quad (212, bis)$$

Разсмотримъ распредѣленіе напряженій на площадку, проведенную черезъ какую угодно точку  $M$  призмы.

Проведемъ черезъ эту точку поперечное сѣченіе призмы.

Какова бы ни была функція  $\varphi(x, y)$ , всегда можно провести черезъ  $M$  въ площадке сѣченія кривую, выражаемую уравненіемъ:  $\varphi(x, y) = \text{постоянному}$ ; къ этой кривой черезъ точку  $M$  восстановимъ нормаль  $n_1$  въ направленіи, опредѣляемомъ величинами слѣдующихъ косинусовъ:

$$\cos(n_1, X) = \frac{K}{T} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \cos(n_1, Y) = \frac{K}{T} \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

гдѣ  $T$  есть положительная величина, а именно:

$$T = K \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}.$$

На площадку, имѣющую нормалью  $n_1$ , т. е. на площадку касательную къ выше-сказанной кривой и притомъ параллельную оси  $Z$ -овъ, будетъ дѣйствовать напряженіе равное нулю, какъ видно изъ формулъ (212 bis); слѣдовательно мы имѣемъ здѣсь одинъ изъ тѣхъ случаевъ, которые разсмотрѣны были въ параграфѣ 31-мъ, когда одно изъ главныхъ напряженій равно нулю.

Вышесказанная площадка, касательная къ цилиндрической поверхности  $\varphi(x, y) = \text{const.}$ , заключаетъ въ себѣ двѣ другія главныя оси напряженій въ точкѣ  $M$ . Проведемъ направленіе  $s_1$ , касательное къ кривой  $\varphi = \text{const.}$  въ точкѣ  $M$  и притомъ въ такую сторону, чтобы было:

$$\cos(s_1, X) = -\cos(n_1, Y) = \frac{T_2}{T}, \quad \cos(s_1, Y) = \cos(n_1, X) = \frac{T_1}{T}.$$

Возьмемъ теперь за направленіе  $n_2$  такое, которое составляетъ съ осью  $Z$ -овъ и направленіемъ  $s_1$  углы въ  $45^\circ$ ; косинусы угловъ, составляемыхъ этимъ направленіемъ съ осями координатъ будутъ равны:

$$\cos(n_2, X) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(s_1, X) = \frac{T_2}{T} \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{K}{T\sqrt{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\cos(n_2, Y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(s_1, Y) = \frac{T_1}{T} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{K}{T\sqrt{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \cos(n_2, Z) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

по формуламъ (212, bis) окажется, что на площадку, имѣющую нормалью  $n_2$ , будетъ дѣйствовать напряженіе, имѣющее слѣдующія проэкціи:

$$X(n_2) = -\frac{K}{\sqrt{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = T \cos(n_2, X),$$

$$Y(n_2) = \frac{K}{\sqrt{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = T \cos(n_2, Y),$$

$$Z(n_2) = \frac{K}{\sqrt{2}} \frac{T}{K} = T \cos(n_2, Z);$$

это значитъ, что направленіе  $n_2$  есть главная ось напряженія въ точкѣ  $M$ , соответствующая нормальному натяженію  $T$  на площадку перпендикулярную къ  $n_2$ .

Если же возьмемъ площадку съ нормалью  $n_3$ , наклоненную къ оси  $Z$ -овъ подъ угломъ въ  $45^\circ$ , а къ направленію  $s_1$  подъ угломъ въ  $135^\circ$ , то найдемъ, что это направленіе  $n_3$  есть направленіе другой главной оси, соответствующей нормальному давленію на площадку перпендикулярную къ  $n_3$ .

Пусть направленіе  $n_1$ , изображенное на чертежѣ 23-мъ, есть направленіе нормали, восстановленное къ кривой  $\phi = C$  изъ точки  $M$  въ сторону возрастающихъ значеній  $C$ , тогда  $s_1$  направлено такъ, какъ изображено на чертежахъ 23-мъ и 24-мъ. Направленія  $Mn_2$  и  $Mn_3$ , изображенные на чертежѣ 24-мъ, будутъ направленіями главныхъ натяженій, а направленія  $Mn_1$  и  $Mn_4$  — направленіями главныхъ давленій.

Если точка  $M$  есть одна изъ точекъ  $A$  боковой поверхности призмы, то кривая  $\phi = C$  есть самый контуръ сѣченія и направленіе  $n_1$  есть направленіе  $n$  наружной нормали къ контуру; тамъ, на наружной поверхности, главное натяженіе и давленіе заключаются въ касательной плоскости къ боковой поверхности и потому, такъ какъ  $s_1$  направлено въ сторону закручиванія призмы, то главная ось натяженій  $n_2$  направлена въ ту сторону, куда наклоняются при крученіи волокна, бывшія параллельными оси призмы.

Такъ какъ главные напряженія суть равныя между собою натяженія и давленія, то эллипсъ напряженій есть кругъ, а кривыя напряженій — равнобочныя гиперболы.

Площадки, нормальныя къ поверхности  $\phi = C$  и проведенныя черезъ касательную  $s_1$ , а также и тѣ нормальныя къ поверхности  $\phi = C$  площадки, которыя параллельны оси  $Z$ -овъ, испытываютъ тангенціальныя напряженія величинъ  $T$ . На чертежѣ 25-мъ изображены: кругъ напряженій точки  $M$ , гиперболы направленій нормалей площадокъ, испытывающихъ натяженія (сплошною чертою) и гиперболы направленій нормалей площадокъ, испытывающихъ давленія (пунктиромъ). Кроме этого стрѣлками изображены направленія тангенціальныхъ напряженій дѣйствующихъ на части вещества, прилежащія къ асимптотическимъ площадкамъ.

Величина  $T$  можетъ имѣть различныя величины въ различныхъ точкахъ одного и того же сѣченія и въ различныхъ точкахъ одной и той же кривой линіи  $\phi = C$ .

На основаніи нижеслѣдующей теоремы можно показать, что  $T$  можетъ имѣть наибольшія значенія только на контурѣ сплошнаго сѣченія призмы.

**Теорема.** Если  $\phi(x, y)$  есть сплошная функція внутри площади, ограниченной замкнутымъ контуромъ, то:

$$\iint \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dx dy = \int \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \dots \dots \dots (216)$$

гдѣ лѣвый интегралъ распространенъ по всей площади, а правый взятъ по всему контуру въ такомъ направленіи, идя по которому будемъ имѣть площадь по правую руку: производная отъ  $\phi$  по  $n$  имѣетъ слѣдующее значеніе:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos(n, X) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cos(n, Y);$$

здѣсь  $n$  есть наружная нормаль.



Эта теорема можетъ быть доказана при помощи формулъ преобразованія (16, а) и (16, б) § 10-го, применяя ихъ къ объему прямого цилиндра, имѣющаго основаніемъ ту площадь на плоскости  $XU$ , объ которой идетъ рѣчь въ доказываемой теоремѣ, а высотой — какую либо длину  $h$ . Подставимъ въ формулѣ (16, а)  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  вмѣсто  $f$ , а въ формулѣ (16, б) производную  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  вмѣсто  $f$ : такъ какъ  $\phi$  есть функція отъ  $x$  и  $y$ , то можно будетъ въ обѣихъ частяхъ обонхъ равенствъ произвести интегрированіе по  $z$  отъ нуля до  $h$  и затѣмъ сократить на  $h$  обѣ части равенствъ. По сложеніи равенствъ мы тогда и получимъ формулу (215).

При такомъ доказательствѣ этой теоремы остается повидимому невыясненнымъ, почему направленіе  $z$  должно считать положительнымъ въ указанную выше сторону. Это обстоятельство объяснится, если примемъ въ расчетъ, что площадь  $dS$  въ формулахъ (16) есть величина положительная и проэкція ея на плоскость  $YZ$ , т. е.  $dydz$  есть также величина положительная когда нормаль  $n$  составляетъ острый уголъ съ осью  $X$ -овъ. Въ настоящемъ случаѣ площадь  $hds$  должна быть величиною положительною и проэкція ея на плоскость  $YZ$ , т. е.  $hdy$  должна быть величиною положительною, когда нормаль  $n$  составляетъ острый уголъ съ осью  $X$ -овъ; стало быть при  $\cos(n, X)$  большемъ нуля отношеніе  $\frac{dy}{ds}$  должно быть положительнымъ, а это можетъ быть только тогда, когда направленіе  $z$  считается положительнымъ въ сторону, означенную оперенною стрѣлкою на чертежѣ 26-мъ.

Изъ равенства (215) слѣдуетъ, что если сумма вторыхъ производныхъ функціи  $\phi$  имѣетъ положительныя значенія во всѣхъ точкахъ площади, ограниченной какою либо замкнутою кривою линіею, то

$$\int \frac{\partial^2 \phi}{\partial n} ds > 0,$$

гдѣ интеграль распространѣнъ по контуру этой кривой въ такомъ направленіи, какъ объяснено выше.

Если  $\phi(x, y)$  есть сплошная функція внутри нѣкоторой площади, имѣющая въ какой либо точкѣ ея  $B$  наибольшее значеніе, то всегда можно окружить эту точку  $B$  такою замкнутою кривою линіею, во всѣхъ точкахъ которой производная  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  имѣетъ величины отрицательныя; для этой замкнутой кривой линіи:

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial n} ds < 0.$$

Слѣдовательно, если во всѣхъ точкахъ площади, ограниченной замкнутымъ контуромъ, сумма:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

имѣетъ положительныя значенія, то функція  $\phi$  не можетъ имѣть maximum'a внутри этой площади.

Составимъ выраженіе для суммы вторыхъ производныхъ отъ  $T^2$ ; окажется, что:

$$\frac{\partial^2 T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^2}{\partial y^2} = 2K^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 \right], \dots \dots \dots (217)$$

такъ какъ:

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} \text{ и } \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3}$$

равны нулю потому что:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2\alpha.$$

Изъ того, что сумма вторыхъ производныхъ отъ  $T^2$ , какъ видно изъ (217), есть величина положительная, слѣдуетъ, что  $T^2$  не можетъ имѣть максимум'а внутри площади сѣченія, ограниченной замкнутымъ контуромъ. Поэтому наибольшее значеніе  $T^2$  найдетсѣ или либо на контурѣ сѣченія призмы.

Такимъ образомъ мы видимъ, что опаснѣйшія мѣста, въ которыхъ тангенціальная сила  $T$  достигаетъ наибольшей величины, могутъ находиться только на боковой поверхности призмы.

Поверхность каждаго поперечнаго сѣченія призмы, бывшаго плоскимъ при предварительномъ состояніи призмы, въ деформированномъ состояніи выразится уравненіемъ, которое получится по исключеніи  $x$  и  $y$  изъ трехъ равенствъ:

$$x = x - \alpha yz, \quad y = y + \alpha xz, \quad z = z + w(x, y).$$

А если взять новыя ося  $\Xi$  и  $\Upsilon$ , повернувшіяся на ничтожно-малый уголъ  $\alpha z$  вѣтъ съ сѣченіемъ, и пренебечь высшими степенями  $\alpha$ , то уравненіе будетъ:  $z = z + w(\xi, \eta)$ .

Поверхность эта *антиклатическая* во всѣхъ своихъ точкахъ, то есть *полная кривизна* во всѣхъ ея точкахъ отрицательная.

Въ самомъ дѣлѣ, произведение радіусовъ кривизны  $R_1$  и  $R_2$  главныхъ нормальныхъ сѣченій какой либо поверхности  $z = f(x, y)$  выражается, какъ извѣстно, такъ:

$$R_1 R_2 = \frac{(1 + r^2 + s^2)^2}{rt - s^2},$$

гдѣ:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Въ настоящемъ случаѣ  $f = w(x, y)$  и  $t = -r$ , а потому выраженіе произведенія  $R_1 R_2$  будетъ имѣть знаменателемъ величину отрицательную, а именно:  $-(r^2 + s^2)$ .

Для того, чтобы сообщить закручиваніе призмѣ, надо приложить къ элементамъ оконечностей ея слѣдующія напряженія:

Основаніе призмы, на которомъ  $\cos(nZ) = +1$ .  
 $X = T, \quad Y = T_1, \quad Z = 0$

Основаніе призмы, на которомъ  $\cos(nZ) = -1$ .  
 $X = -T, \quad Y = -T_1, \quad Z = 0.$

Главный момент вокруг оси  $Z$ -овъ тангенціальныхъ напряженій, которыя должно приложить къ концу  $\cos(\mu, Z) = +1$ , будетъ равенъ:

$$L = K \iint \left( x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy, \dots\dots\dots (218)$$

гдѣ интеграль распространёнъ по всей площади основанія.

Такая же совокупность прямо-противоположныхъ напряженій должна быть приложена къ другому основанію призмы.

Все вышесказанное примѣнимъ къ слѣдующимъ призмамъ и частнымъ случаямъ.

1. Возьмемъ  $F(x + yi) = A(x + yi)^2$ , гдѣ  $A$  постоянная; тогда  $w = 2Axy$ ,  $\psi = A(x^2 - y^2)$ .

Уравненіе контура:

$$\left( A + \frac{\alpha}{2} \right) x^2 + \left( \frac{\alpha}{2} - A \right) y^2 = B,$$

гдѣ  $B$  другая постоянная. Это уравненіе есть уравненіе эллипса съ полуосями  $a$  и  $b$  если:

$$a^2 = \frac{B}{A + \frac{\alpha}{2}}, \quad b^2 = \frac{B}{\frac{\alpha}{2} - A}.$$

Опредѣливъ отсюда  $A$  въ  $\alpha$ ,  $a$  и  $b$  и подставивъ въ  $\psi$ , найдемъ:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\alpha}{2} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \alpha \frac{b^2 x^2 + a^2 y^2}{a^2 + b^2}, \\ T_1 &= 2\alpha K \frac{b^2 x}{a^2 + b^2}, \quad T_2 = -2\alpha K \frac{a^2 y}{a^2 + b^2}, \\ L &= 2\alpha K \iint \frac{b^2 x^2 + a^2 y^2}{a^2 + b^2} dx dy = K\alpha \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \dots\dots\dots (219) \end{aligned}$$

$\alpha$  есть уголъ крученія на единицу длины цилиндра; если  $l$  есть длина призмы, то уголъ  $\theta$ , на который закрутится цилиндръ закрѣпленный на одномъ концѣ и подвергнутый закручивающимъ силамъ, приложеннымъ къ другому концу и имѣющимъ моментъ  $L$  вокругъ оси  $Z$ -овъ, будетъ равенъ:

$$\theta = \frac{Ll(a^2 + b^2)}{K\pi a^3 b^3} \dots\dots\dots (220)$$

Опаснѣйшія точки будутъ на контурѣ, а именно тамъ, гдѣ

$$T = \frac{2\alpha K}{a^2 + b^2} \sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2} = 2\alpha K \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{D}$$

имѣетъ наибольшую величину;  $D$  означаетъ разстояніе отъ центра эллипса касательной, проведенной къ нему черезъ точку  $(x, y)$  его контура. Величина  $T$  наибольшая тамъ, гдѣ  $D$  наименьшая, т. е. на концахъ малой полуоси.

Вдоль по производящимъ, проходящимъ черезъ концы малыхъ осей поперечныхъ сѣченій эллиптическаго цилиндра, тангенціальное срывающее напряженіе имѣетъ наибольшую величину чѣмъ гдѣ либо въ другихъ частяхъ цилиндра; тамъ оно равно:

$$2\alpha K \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}.$$

Если начнетъ происходить разрушеніе скручиваемаго цилиндра, то оно начнется съ расщепленія вдоль по этимъ производящимъ.

Чтобы дать понятіе о видѣ искривленной поверхности сѣченія цилиндра, опредѣлимъ видъ кривыхъ линий, образуемыхъ на пересѣченіяхъ этой поверхности съ плоскостями, перпендикулярными къ оси призмы; эти кривыя называются топографическими линиями.

Пересѣченіе поверхности  $z = z = 2\alpha \xi \eta$  плоскостью  $z = z$ , проведенною черезъ центръ эллипса, будетъ состоять изъ двухъ прямыхъ:  $\eta = 0$ ,  $\xi = 0$ , т. е. осей эллипса (черт. 27).

При  $(z - z)$ , равныхъ положительной величинѣ  $h$ , получаемъ равнобочную гиперболу:

$$-h = \alpha \frac{a^2}{a^2 + b^2} \xi \eta,$$

расположенную въ углахъ  $\Gamma\Xi$  и  $\bar{\Gamma}\bar{\Xi}$  (черт. 27).

При  $(z - z)$ , равныхъ отрицательной величинѣ  $(-h)$ , получаемъ равнобочную гиперболу:

$$h = \alpha \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \xi \eta,$$

расположенную въ квадрантахъ  $\Xi\bar{\Gamma}$  и  $\bar{\Xi}\Gamma$ .

Отсюда слѣдуетъ, что площадь псбывденнаго сѣченія, раздѣляемая главными діаметрами  $\Xi\Xi$  и  $\bar{\Gamma}\bar{\Gamma}$  эллипса на четыре сектора, выпукла къ положительной оси  $Z$ -овъ въ секторахъ  $\Xi\bar{\Gamma}$  и  $\bar{\Xi}\Gamma$  и вогнута въ двухъ остальныхъ. На чертежѣ 27-мъ изображены сплошными гиперболами топографическія линіи выпуклыхъ секторовъ и пунктирными — такія же линіи вогнутыхъ секторовъ.

Всѣ кривыя  $\phi = C$  суть эллипсы, подобныя наружному.

2. Возьмемъ  $F = A (x + yi)^3$ ; тогда:

$$w = A (3x^2y - y^3) = Ar^3 \sin 3\theta, \quad \psi = A (x^3 - 3xy^2) = Ar^3 \cos 3\theta.$$

Контурами могутъ быть всякія кривыя, выражаемыя уравненіями:

$$r^3 \cos 3\theta + \frac{\alpha}{2A} r^2 = C.$$

По формѣ этого уравненія легко видѣть, что каждая изъ такихъ кривыхъ имѣетъ одинаковые радіусы векторы при аргументахъ  $\theta$ ,  $\theta + \frac{2\pi}{3}$ ,  $\theta + \frac{4\pi}{3}$ , гдѣ  $\theta$  есть какая угодно величина, при которой  $r$  имѣетъ дѣйствительное значеніе.



Если взять за  $C$  следующую величину:

$$C = 4 \frac{h^3}{27}, \quad h = \frac{1}{2A},$$

то уравнение контура можно будет представить такъ:

$$r^3 \cos^3 \theta - \left(\frac{h}{3}\right)^3 - \frac{3}{4} r^2 \cos \theta + \frac{h}{4} r^2 = 0,$$

потому что  $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ ; затѣмъ такъ:

$$\left(x - \frac{h}{3}\right) \left(\frac{x^2}{4} + \frac{xh}{3} + \frac{h^2}{9} - \frac{3}{4} y^2\right) = 0,$$

гдѣ  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . Теперь уже видно, что первая часть этого уравненія разлагается на три линейные множителя, а потому контуръ состоитъ изъ трехъ прямыхъ линий:

$$x = \frac{h}{3}, \quad x - \frac{\sqrt{3}}{2} y = -\frac{h}{3}, \quad x + \frac{\sqrt{3}}{2} y = -\frac{h}{3},$$

образующихъ равносторонній треугольникъ  $abc$  (черт. 28), высота котораго равна  $h$ .

Внутри площади этого треугольника:

$$\varphi = \frac{\alpha}{2h} (x^3 - 3xy^2 + h(x^2 + y^2)),$$

$$x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\alpha}{2h} (3r^3 \cos 3\theta + 2hr^2)$$

$$L = K\alpha \int \left( \frac{r^4}{4} + \frac{3}{10} \frac{r^5}{h} \cos 3\theta \right) d\theta;$$

такъ какъ на контурѣ:

$$r^3 \cos 3\theta = 4 \left(\frac{h}{3}\right)^3 - hr^2$$

и такъ какъ затѣмъ можно положить  $r = (h : 3 \cos \theta)$  и интегрировать шесть разъ въ предѣлахъ отъ  $\theta = 0$  до  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , то получимъ:

$$L = \frac{4K\alpha h^4}{15 \cdot 3^2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{3 \cos^4 \theta} \right) d\theta = \frac{K\alpha h^4}{15 \sqrt{3}} \dots \dots \dots (221)$$

Отсюда, по величинѣ момента закручивающихъ силъ, опредѣлимъ уголъ закручиванія  $\alpha$  на единицу длины.

Напряженія выразятся такъ:

$$T_1 = \frac{K\alpha}{2h} 2(3xy - hy), \quad T_1 = \frac{K\alpha}{2h} (3x^2 - 3y^2 + 2hx)$$

$$T = \frac{K^2\alpha^2}{4h^2} [4h^2r^2 + 9r^4 + 12h(x^3 - 3xy^2)].$$

Вслѣдствіе существующей между  $x$  и  $y$  зависимости на контурѣ,  $T$  выразится въ немъ такъ:

$$T = \frac{K\alpha}{2h} \left( \frac{4}{3} h^3 - 3r^2 \right).$$

Это выраженіе будетъ наибольшимъ при  $9r^2 = h^2$ , то есть въ серединахъ реберъ гдѣ  $2T = Kah$ , и равно нулю въ вершинахъ треугольника.

Уравненія топографическихъ линій — слѣдующія:

$$r^3 \sin 3\theta = \text{const.}$$

Линія  $r^3 \sin 3\theta = 0$  состоитъ изъ шести биссекторовъ угловъ. Выпуклые секторы чередуются съ вогнутыми (см. черт. 28).

Уравненія кривыхъ  $\phi = Cx^2$ , гдѣ  $x^2$  не болѣе единицы, а  $C$  равно  $(4h^3:27)$  можно представить такъ:

$$\frac{h^3}{r^3} - \frac{27}{4x^2} \frac{h}{r} - \frac{27}{4x^2} \cos 3\theta = 0$$

и затѣмъ рѣшить относительно  $r$ ; для этого положимъ:

$$\frac{h}{r} = \frac{3}{x} \cos \omega,$$

тогда изъ уравненія окажется, что  $\cos 3\omega = x \cos 3\theta$ , а потому уравненіе каждой кривой, на которой  $x$  имѣетъ постоянную величину, меньшую единицы, можно написать такъ:

$$r = \frac{h}{3} \frac{x}{\cos \frac{1}{3} (\arccos (x \cos 3\theta))}.$$

Каждая изъ этихъ кривыхъ есть замкнутый контуръ вида, изображеннаго на чертежѣ 29-мъ; для каждого изъ этихъ контуровъ задача о крученіи можетъ быть рѣшена также какъ и для треугольника.

3. Возьмемъ  $F = A(x + yi)^4$ .

$$\phi = Ar^4 \cos 4\theta = A(x^4 - 6x^2y^2 + y^4),$$

$$\omega = Ar^4 \sin 4\theta = 4A(x^3 - y^3)xy,$$

жить  $2A$  равнымъ ( $-a\alpha$ ) и рассмотримъ различные виды замкнутыхъ контуровъ, выражаемыхъ равенствами:

$$\frac{\alpha}{2} (r^2 - ar^4 \cos 4\theta) = C$$

где  $(2C:\alpha)$  положимъ равнымъ  $(1-a)$ .

Рѣшивъ это уравненіе относительно  $(1:r)$ , мы получимъ слѣдующее выраженіе:

$$\frac{\sqrt{2(1-a)}}{r} = \sqrt{1 + \sqrt{1 - 4a(1-a)} \cos 4\theta} \dots \dots \dots (222)$$

Если  $a$  есть положительная дробь не большая единицы, то  $(1-a)$  будетъ величина положительная, произведеніе  $4a(1-a)$  будетъ дробь меньшая единицы, потому что  $1 - 4a(1-a)$ , равное  $(1-2a)^2$ , есть величина положительная; поэтому выраженіе  $(1 - 4a(1-a) \cos 4\theta)$ , которое назовемъ черезъ  $P^2$ , будетъ положительнымъ для всѣхъ аргументовъ  $\theta$ .

Видѣтъ съ тѣмъ очевидно, что при такихъ значеніяхъ  $a$  выраженіе  $P$  получаетъ значенія большія единицы для всѣхъ тѣхъ угловъ, при которыхъ  $\cos 4\theta < 0$ . Поэтому всѣ кривыя этой категоріи имѣютъ замкнутую часть, выражаемую равенствомъ

$$\frac{\sqrt{2(1-a)}}{r} = \sqrt{1 + P}$$

и незамкнутыя части, выражаемыя равенствомъ.

$$\frac{\sqrt{2(1-a)}}{r} = \sqrt{1 - P}.$$

Замкнутыя части этихъ кривыхъ пересѣкаютъ оси X-овъ и Y-овъ въ слѣдующихъ разстояніяхъ отъ начала координатъ: тѣ, для которыхъ  $a$  не болѣе 0,5, въ разстояніи  $r=1$ , а тѣ, для которыхъ  $a$  болѣе половины, въ разстояніяхъ равныхъ  $(\sqrt{1-a}:\sqrt{a})$ .

При  $a$  равномъ нулю, замкнутая часть кривой есть кругъ радіуса равнаго единицѣ. Замкнутыя кривыя для параметровъ  $a$  отъ 0 до 0,5 (нѣкоторые изъ нихъ изображены на чертежѣ 30-мъ) всѣ проходятъ черезъ точки пересѣченія этого круга съ осями координатъ. Кривая, соответствующая параметру  $a=0,4$ , пересѣкаетъ направленія  $\theta = \pm 45^\circ$  въ разстояніяхъ равныхъ  $(1:\sqrt{2})$  отъ центра; если построить квадратъ, имѣющій вершины въ вышесказанныхъ четырехъ точкахъ, то окажется, что эта кривая ( $a=0,4$ ) касается къ серединамъ сторонъ его и по своему виду весьма похожа на него.

При  $a$  равномъ 0,5 замкнутая часть кривой образуется изъ частей двухъ гиперболъ:

$$(1 + \sqrt{2}) r^2 \cos^2 \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) + (1 - \sqrt{2}) r^2 \sin^2 \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

съ полуосями:  $(1 + \sqrt{2})$  и  $(\sqrt{2} - 1)$ , дѣлящими углы между осями X и Y пополамъ; эти гиперболы проведены толстою чертою на чертежѣ 30-мъ.

Если взять  $a$  отрицательным ( $= a_1$ ), то  $P^2$  будет положительною величиною для всяких  $\theta$  при такихъ величинахъ  $a_1$ , при которыхъ положительное количество  $4a_1(1+a_1)$  есть дробь не большая единицы; для этого надо, чтобы  $a_1$  было больше  $(\sqrt{2}-1)$ , деленнаго на два. Замкнутыя части всѣхъ кривыхъ съ такими параметрами проходятъ черезъ точки пересѣченія круга  $r=1$  съ осями координатъ.

Замкнутая часть кривой  $a = ((1-\sqrt{2}):2)$  состоитъ изъ частей двухъ гиперболъ

$$(1+\sqrt{2})\cos^2\theta + (1-\sqrt{2})\sin^2\theta = \frac{1+\sqrt{2}}{r^2}$$

съ полуосями: 1 и  $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ , расположенными по осямъ координатъ; эти гиперболы касаются въ кругу  $r=1$ .

Между криволинейнымъ четырехугольникомъ, образуемымъ этими гиперболою и кругомъ  $r=1$  заключаются замкнутыя части всѣхъ кривыхъ, параметры  $a$  которыхъ отрицательны, но не менѣе параметра гиперболъ. Кривая съ параметромъ  $a = -0,1$  пересѣкаетъ направленія  $\theta = \pm 45^\circ$  въ разстояніяхъ равныхъ  $\sqrt{2}$  отъ центра; она такъ же похожа на квадратъ, какъ и кривая  $a = 0,4$ .

Для всѣхъ этихъ замкнутыхъ контуровъ  $\varphi$  выражается одинаковою формулою:

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} (x^2 + y^2 - a(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)).$$

Если радіусъ круга  $a=0$  равенъ  $R$ , то надо положить  $C$  равнымъ  $\alpha R^4(1-a)$  деленному на 2 и умножить  $r^2$  на  $R$ , такъ что уравненіе контура должно быть:

$$R^2r^2 - r^4a \cos 4\theta = R^4(1-a) \dots \dots \dots (223)$$

Такъ какъ

$$x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \alpha (r^2 R^2 - 2ar^4 \cos 4\theta)$$

то моментъ закручивающихъ силъ выразится такъ:

$$L = K\alpha \iint (r^2 R^2 - 2ar^4 \cos 4\theta) r dr d\theta = K\alpha \int \left( r_1^4 R^2 - a r_3^6 \cos 4\theta \right) d\theta,$$

гдѣ  $r_1$  суть радіусы векторы точекъ контура, а потому:

$$\begin{aligned} r_1^4 R^2 - a r_3^6 \cos 4\theta &= R^2 \left( r_1^2 R^2 (1-a) - r_4^4 \right) = \\ &= \frac{R^6 (1-a)^2}{3} \frac{1+2P}{(1+P)^2}; \quad P^2 = 1 - 4a(1-a) \cos 4\theta. \end{aligned}$$

$$L = \frac{8K\alpha}{3} R^6 (1-a)^2 \left[ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+P} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+P)^2} \right] \dots \dots \dots (224)$$

По этой формулѣ должно вычислить  $\alpha$  для даннаго  $L$ .

Опаснѣйшія точки на контурѣ здѣсь суть тѣ, въ которыхъ величина:

$$T^2 = K^2 a^2 (4a^2 r_1^6 - 3r_1^2 R^4 + 4R^6 (1 - a)) \dots \dots \dots (225)$$

имѣетъ наибольшее значеніе.

Обратимъ здѣсь вниманіе на то обстоятельство, что въ вершинахъ четырехугольниковъ, образуемыхъ гиперболами, напряжение  $T$  равно нулю; въ самомъ дѣлѣ, при  $a = 0,5$  и для  $r_1 = R$ , а также при  $a = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$  и для  $r_1^2 = R^2 (1 + \sqrt{2})$ , выраженіе (225) обращается въ нуль.

Всѣ эти контуры четвертаго порядка болѣе или менѣе отличаются отъ прямолинейнаго квадрата.

Вопросъ о крученіи призмы съ квадратнымъ или прямоугольнымъ сѣченіемъ можетъ быть рѣшенъ при помощи теоремы Фурье (относительно разложенія періодическихъ функцій въ ряды, расположенныя по синусамъ и косинусамъ кратныхъ дугъ), причемъ рѣшеніе выразится въ видѣ рядовъ.

4. Для рѣшенія вопроса о крученіи призмы, сѣченіе которой есть прямоугольникъ длины  $2a$  и ширины  $2b$ , положимъ

$$F(x + yi) = \Phi(x + yi) - \frac{\alpha}{2} (x + yi)^2$$

т. разложивъ  $\Phi(x + yi)$  на мнимую и действительную части  $W(x, y)$  и  $\Psi(x, y)$ , возьмемъ:  $\phi = \Psi + \frac{\alpha}{2} (y^2 - x^2)$ ,  $w = W - \alpha xy$ .

Функция  $\Psi$  должна быть такова, чтобы на контурѣ прямоугольника  $\phi$  равнялось постоянной  $C$ , за которую возьмемъ  $b^2 \alpha$ .

Слѣдовательно, для всякихъ  $y$ , при  $x$  равномъ  $+a$  или  $(-a)$  должно быть:

$$\Psi(\pm a, y) + \frac{\alpha}{2} (y^2 - a^2) + \frac{\alpha}{2} (a^2 + y^2) = ab^2$$

и, для всякихъ  $x$ , при  $y$  равномъ  $+b$  или  $(-b)$  должно быть:

$$\Psi(x, \pm b) + \frac{\alpha}{2} (b^2 - x^2) + \frac{\alpha}{2} (x^2 + b^2) = ab^2.$$

Слѣдовательно функция  $\Psi$  должна удовлетворять слѣдующимъ требованіямъ:

Для всякаго  $y$ , заключающагося въ предѣлахъ отъ  $y = -b$  до  $y = +b$ , должно быть:

$$\Psi(+a, y) = \alpha (b^2 - y^2), \quad \Psi(-a, y) = \alpha (b^2 - y^2) \dots \dots \dots (226)$$

Для всякаго  $x$ , заключающагося въ предѣлахъ отъ  $x = -a$  до  $x = +a$ , должно быть:

$$\Psi(x, +b) = 0, \quad \Psi(x, -b) = 0 \dots \dots \dots (227)$$

По значенію функціи  $\phi$ , имѣя въ виду симметрію площади сѣченія относительно осей координатъ, можно сдѣлать, что  $\Psi$  должна быть четною функціею, какъ относи-



тельно  $x$ , такъ и относительно  $y$ ; обратимъ теперь вниманіе на четность этой функціи относительно  $y$ , т. е. на то, что она должна имѣть равныя значенія для  $y_1$  и для  $-y_1$ , при томъ же  $x$ .

По теоремѣ Фурье всякая четная функція отъ какой либо переменной внутри данныхъ предѣловъ можетъ быть выражена въ видѣ ряда расположеннаго по косинусамъ дугъ кратныхъ отъ этой переменной; такъ, напримѣръ, разность  $(b^2 - y^2)$  въ предѣлахъ отъ  $y = -b$  до  $y = +b$  можетъ быть разложена по косинусамъ дугъ кратныхъ отъ  $\frac{\pi y}{2b}$ :

$$b^2 - y^2 = C_1 \cos \frac{\pi y}{2b} + C_3 \cos 3 \frac{\pi y}{2b} + C_5 \cos 5 \frac{\pi y}{2b} + \dots$$

Здѣсь оставлены только члены нечетной кратности, такъ какъ очевидно, что членъ четной кратности не должно быть, если функція должна обращаться въ нуль при  $y = \pm b$ .

Для опредѣленія величины котораго либо изъ коэффициентовъ, напримѣръ  $C_{2j+1}$ , должно умножить обѣ части написаннаго равенства на

$$\cos (2j+1) \frac{\pi y}{2b} dy = \cos (2j+1) \eta dy$$

и взять интегралъ отъ обѣихъ частей въ предѣлахъ отъ  $y = -b$  до  $+b$ ; тогда интегралы, заключающіе произведенія косинусовъ не одинаковой кратности, окажутся равными нулю и во второй части останется только одинъ интегралъ, помноженный на  $C_{2j+1}$ ; этотъ интегралъ окажется равнымъ  $b$ , а потому:

$$\int_{-b}^{+b} (b^2 - y^2) \cos (2j+1) \eta dy = b C_{2j+1}.$$

Интегрируя интегралъ первой части по частямъ три раза, найдемъ, что:

$$C_{2j+1} = (-1)^j \frac{4b^2}{(2j+1)^3} \left( \frac{2}{\pi} \right)^3,$$

а потому  $(b^2 - y^2)$  выражается въ сказанныхъ предѣлахъ слѣдующимъ рядомъ:

$$b^2 - y^2 = 4b^2 \left( \frac{2}{\pi} \right)^3 \left\{ \cos \eta - \frac{1}{3^3} \cos 3\eta + \frac{1}{5^3} \cos 5\eta - \dots \right\} \dots \quad (228)$$

Функція  $\Psi$  должна быть тоже четною функціею отъ  $y$  и тоже должна обращаться въ нуль при  $y = \pm b$  какъ видно изъ (227), а потому она должна въ предѣлахъ отъ  $y = -b$  до  $y = +b$  выражаться въ видѣ ряда:

$$\Psi = X_1 \cos \eta + X_3 \cos 3\eta + X_5 \cos 5\eta + \dots,$$

гдѣ коэффициенты суть функціи отъ  $x$ , видъ которыхъ предстоитъ теперь опредѣлять.

Функция  $\Psi$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

при всяких  $y$ , а потому функции  $X$  должны удовлетворять слѣдующимъ дифференциальнымъ уравненіямъ: напиримѣръ  $X_{2j+1}$  должна удовлетворять уравненію:

$$\frac{\partial^2 X_{2j+1}}{\partial x^2} - (2j+1)^2 \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 X_{2j+1} = 0.$$

Этому уравненію удовлетворяетъ слѣдующая функция съ двумя произвольными постоянными  $A_{2j+1}$  и  $B_{2j+1}$ :

$$X_{2j+1} = A_{2j+1} e^{(2j+1)\xi} + B_{2j+1} e^{-(2j+1)\xi}, \quad \xi = \frac{\pi x}{2b}.$$

По условию же (226), функция  $\Psi$  при  $x = \pm a$  должна быть равна  $\alpha(b^2 - y^2)$  при всякихъ  $y$  въ скачанныхъ предѣлахъ; изъ этого слѣдуетъ, что при  $x = \pm a$  и при  $x = -a$  коэффициенты у косинусовъ одинаковыхъ дугъ въ разложеніи функции  $\Psi$  и въ рядѣ (228) должны быть равны, т. е.:

$$\begin{aligned} + A_{2j+1} e^{(2j+1)k} + B_{2j+1} e^{-(2j+1)k} &= (-1)^j \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{4ab^2}{(2j+1)^3} \\ + A_{2j+1} e^{-(2j+1)k} + B_{2j+1} e^{(2j+1)k} &= (-1)^j \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{4ab^2}{(2j+1)^3}, \quad k = \frac{\pi a}{2b} \end{aligned}$$

откуда слѣдуетъ:

$$A_{2j+1} = B_{2j+1} = 4\alpha \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{b^2}{(2j+1)^3} \frac{(-1)^j}{2 \cos(2j+1)k}.$$

Слѣдовательно:

$$\Psi = \alpha \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 4b^2 \sum_{(2j+1)^3} \frac{(-1)^j \cos(2j+1)\xi}{\cos(2j+1)k} \cos(2j+1)\eta \dots \dots (229)$$

Такъ какъ это есть дѣйствительная часть слѣдующей функции отъ комплексной переменной  $(x + yi)$ :

$$\Phi = \alpha \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 4b^2 \sum_{(2j+1)^3} \frac{(-1)^j \cos(2j+1)(\xi + i\eta)}{\cos(2j+1)k}$$

то взявъ за  $W$  мнимую часть этой функции, заключаемъ, что

$$w = -\alpha xy - \alpha \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 4b^2 \sum_{(2j+1)^3} \frac{(-1)^j \sin(2j+1)\xi}{\cos(2j+1)k} \sin(2j+1)\eta \dots (230)$$

Моментъ закручивающихъ силъ выразится формулою:

$$L = K \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \left( x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy, \quad \varphi = \Psi + ay^2,$$

гдѣ

$$x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2ay^2 - a \left( \frac{2}{\pi} \right)^2 4b \sum \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2} \frac{S_j}{\cos 2j+1) \frac{\pi}{2k}} \dots \dots \dots (231)$$

$$S_j = xi \sin (2j + 1) \xi i \cos (2j + 1) \eta + y \sin (2j + 1) \eta \cos (2j + 1) \xi i.$$

Интегрируя, получимъ слѣдующее выраженіе:

$$L = K\alpha \left( \frac{8ab^3}{3} + \left( \frac{2}{\pi} \right)^4 16ab^3 \sum \frac{1}{(2j+1)^4} - 2 \left( \frac{2}{\pi} \right)^5 (2b)^4 \sum \frac{\operatorname{tg} (2j+1) \frac{\pi}{2k}}{(2j+1)^5} \right).$$

Интегрируя равенство (228) по  $y$  въ предѣлахъ отъ  $(-b)$  до  $+b$ , мы найдемъ:

$$\frac{1}{6} = \left( \frac{2}{\pi} \right)^4 \sum \frac{1}{(2j+1)^4},$$

а потому выраженіе для  $L$  получить слѣдующій видъ:

$$L = K\alpha 16ab^3 \left( \frac{1}{3} - \left( \frac{2}{\pi} \right)^5 \frac{2b}{a} \sum \frac{\operatorname{tg} (2j+1) \frac{\pi}{2k}}{(2j+1)^5} \right) \dots \dots \dots (232)$$

Величина напряженія  $T$  въ точкахъ контура можетъ быть представлена въ видѣ дѣленнаго на  $a$  или  $b$  произведенія изъ  $K$  на выраженіе (231); послѣднее при  $x = \pm a$  и  $y = \pm b$  получаетъ слѣдующій видъ:

$$2ab^3 - a \left( \frac{2}{\pi} \right)^2 4b^3 \sum \frac{1}{(2j+1)^2}; \dots \dots \dots (233)$$

величину же послѣдней суммы мы получимъ, взявъ производную отъ обѣихъ частей равенства (228) и положивъ въ немъ затѣмъ  $y = b$ ; опредѣливъ величину этой суммы мы увидимъ, что выраженіе (233) равно нулю. Отсюда слѣдуетъ, что въ вершинахъ прямоугольника напряженіе равно нулю, а слѣдовательно тамъ нѣтъ и сдвиговъ.

Видъ топографическихъ линій на квадратахъ и прямоугольникахъ изображенъ на чертежахъ 31-мъ и 32-мъ.

5. Возьмемъ за  $F(x + yi)$  слѣдующую сумму:

$$F(x + yi) = A(x + yi)^2 + B(x + yi)^4$$

и опредѣлимъ тѣ изъ кривыхъ:

$$\frac{ar^2}{2} + Ar^2 \cos 2\theta + Br^4 \cos 4\theta = C,$$

которыя не только пересѣкаютъ обѣ оси координатъ, но и кромѣ того имѣютъ части, образующія замкнутую фигуру вокругъ начала координатъ.

Пусть  $x = +a$  суть абсциссы точек пересѣченія кривой съ осью X-овъ и  $x = +b$  — ординаты точек пересѣченія ея съ осью Y-овъ.

Изъ уравненій:

$$\frac{aa^2}{2} + Aa^3 + Ba^4 = C, \quad \frac{ab^2}{2} - Ab^3 + Bb^4 = C$$

если притомъ положимъ  $C(a^2 + b^2) = \alpha(1 + n)a^2b^2$ , окажется, что

$$A = -\frac{1+2n}{2} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \alpha, \quad B = \frac{n\alpha}{a^2+b^2}.$$

Представимъ теперь уравненіе контура подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{4C}{r^4} = \alpha + 2A \cos 2\theta \pm \sqrt{(\alpha + 2A \cos 2\theta)^2 + 16CB \cos 4\theta}.$$

Для того, чтобы при положительномъ  $C$  контуръ со всѣхъ сторонъ былъ замкнутымъ, необходимо, чтобы подкоренная сумма была положительною при всякихъ значеніяхъ  $\theta$ .

$C$  будетъ положительнымъ при всякомъ  $n$  большемъ минусъ единицы; при  $\theta$  равномъ нулю подкоренная сумма есть величина положительная, равная  $4\alpha^2(b^2 + n(a^2 + b^2))^2 : (a^2 + b^2)^2$ . Для того, чтобы это подкоренное выраженіе ни при какомъ  $\theta$  не сдѣлалось отрицательнымъ, необходимо, чтобы корни уравненія:

$$\alpha - 16CB + 4A\alpha \cos 2\theta + 4(A^2 + 8CB) \cos^2 2\theta = 0,$$

т. е. значенія  $\cos 2\theta$ , обращающія первую часть въ нуль, были бы мнимыми, или же большими  $+1$  или меньшими  $(-1)$ .

Корни этого уравненія будутъ мнимыми, если выраженіе

$$-8CB(\alpha^2 - 2A^2 - 16CB)$$

т. е.:

$$\frac{8a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} ((a^2+b^2)^2 + 4a^2b^2) n(n+1) \left(1 - \frac{(1+2n)^2}{2}\right)$$

будетъ отрицательнымъ.

Это выраженіе будетъ отрицательнымъ при  $n > 0$  и притомъ не большемъ  $((\sqrt{2} - 1):2)$ .

При  $n = 0$  замкнутый контуръ есть эллипсъ съ полуосями  $a$  и  $b$ ; при этомъ  $n$ , подъ корнемъ остается полный квадратъ.

При  $n = ((\sqrt{2} - 1):2)$  подъ корнемъ также будетъ полный квадратъ, а именно:

$$\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \sqrt{2} \cos 2\theta\right)^2;$$

замкнутый контуръ будетъ состоять изъ частей двухъ гиперболъ, а именно изъ частей гиперболы:

$$b^2 (\sqrt{2} + 1) = r^2 (1 - \sqrt{2} \cos 2\theta), \text{ для } \cos 2\theta \text{ не большихъ } \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

и изъ частей гиперболы

$$a^2 (\sqrt{2} + 1) = r^2 (1 + \sqrt{2} \cos 2\theta), \text{ для } \cos 2\theta \text{ большихъ } \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Контуръ для всѣхъ промежуточныхъ  $n$  проходитъ всѣ черезъ концы полуосей эллипса  $n = 0$ , къ которому прикасаются двѣ вышеупомянутыя гиперболы.

Контуръ  $n = 0,2$  проходитъ не только черезъ эти точки, но также и черезъ вершины прямоугольника, описаннаго около эллипса  $n = 0$ .

8. Кромѣ этихъ контуровъ, къ которымъ указанный здѣсь пріемъ прилагается такимъ же образомъ, какъ и къ контурамъ пункта 3-го настоящаго параграфа, мы упомянемъ еще объ одномъ контурѣ, выражаемомъ слѣдующимъ уравненіемъ въ полярныхъ координатахъ:

$$\left(\frac{r}{b}\right)^2 - \frac{48}{49} \frac{16}{17} \left(\frac{r}{b}\right)^4 \cos 4\theta + \frac{12}{49} \frac{16}{17} \left(\frac{r}{b}\right)^6 \cos 8\theta = 1 - \frac{36}{49} \frac{16}{17}.$$

Этотъ контуръ, изображенный на чертежѣ 33-мъ, представляетъ четырехугольникъ съ лопастями; наиболѣе радіусы векторы, при  $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ , равны  $b$ ; наименьшіе при  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ , равны половинѣ  $b$ . На чертежѣ (33-мъ) изображены топографическія линии искривленнаго крученіемъ сѣченія, ограниченнаго этимъ контуромъ.

9. Разсмотрѣвъ вопросъ о закручиваніи призмы съ какими либо изъ вышеуказанныхъ контуровъ вокругъ оси, проведенной черезъ центры контуровъ, можно перейти къ вопросу о крученіи той же призмы вокругъ какой либо экцентрической оси. Пусть  $F(x + yi)$  есть какая либо функція отъ  $(x + yi)$  дѣйствительная часть которой, сложенная съ  $\frac{a}{2} r^2$ , даетъ намъ первую часть уравненія  $\Phi(x, y) = C$ , выражающаго нѣкоторый контуръ. Если требуется разсмотрѣть вопросъ о закручиваніи той же призмы вокругъ оси, пересекающей плоскость  $XU$  въ точку, имѣющей координаты:  $x = -a, y = -b$ , то перенесемъ начало координатъ въ эту точку, чтобы уравненіе контура получило видъ:  $\Phi((x - a), (y - b)) = C$ ; затѣмъ возьмемъ слѣдующую функцію:

$$F(x + yi - (a + bi)) = a(a - bi)(x + yi)$$

дѣйствительную часть которой означимъ черезъ  $\psi_1$ , а мнимую — черезъ  $\omega_1$ .

Уравненіе контура будетъ тогда:

$$\frac{ar^2}{2} + \psi_1 = \frac{a}{2} ((x - a)^2 + (y - b)^2) + \psi(x - a, y - b) = \frac{a}{2} (a^2 + b^2) = C_1. \quad (234)$$



гдѣ  $C_1 = C - \frac{\alpha}{2} (a^2 + b^2)$ , новыя же перемѣщенія параллельно оси  $Z$ -овъ выразятся такъ:

$$w_1 = w (x - a, y - b) + \alpha (bx - ay), \dots \dots \dots (235)$$

гдѣ  $\psi (x, y)$  и  $w (x, y)$  суть действительная и мнимая часть функціи  $F (x + yi)$ .

Означивъ черезъ  $\varphi_1$  сумму  $\psi_1 + \frac{\alpha x^2}{2}$ , составимъ выраженія напряженій и момента закручивающихъ силъ по общимъ формуламъ, приведеннымъ въ началѣ настоящаго параграфа; такъ какъ:

$$\varphi_1 = \varphi (x - a, y - b) - \frac{\alpha}{2} (a^2 + b^2),$$

то найдемъ, что:

$$T_1 = K \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = K \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad T_2 = -K \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -K \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

т. е., что величины напряженій и сдвиговъ при крученіи призмы вокругъ эксцентрической оси таковы же, какъ и при крученіи ея вокругъ оси симметріи на томъ же уголѣ  $\alpha$ .

Моментъ закручивающихъ силъ вокругъ новой оси выразится такъ:

$$\begin{aligned} L &= K \iint \left( x \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= K \iint \left( (x - a) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d(x - a) d(y - b) \dots \dots (236) \end{aligned}$$

потому что извѣстныя интегралы, распространенныя по площади основанія:

$$K \iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy, \quad K \iint \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy$$

должны быть равны нулю, такъ какъ если ихъ помножить на  $(-l)$ , гдѣ  $l$  есть длина призмы, то они представятъ величины главныхъ моментовъ вѣшавшихъ напряженій вокругъ осей  $X$ -овъ и  $Y$ -овъ, а эти моменты должны быть равны нулю.

Формула (236) показываетъ, что при томъ же моментѣ  $L$ , уголъ  $\alpha$  закручиванія соизмѣна сланы призмы вокругъ эксцентрической оси будетъ тотъ же самый, на какой она закручивается вокругъ оси симметріи.

Изъ формулы (235) видно, что разннца между перемѣщеніями  $w$  и  $w_1$  заключается только въ членѣ  $\alpha (b(x - a) - a(y - b))$ ; уравненіе же  $z = \alpha (bx - ay)$  есть уравненіе плоскости, проходящей черезъ начало координатъ и черезъ центръ симметріи сѣченія и нормальной къ винтовой линіи, описываемой осью симметріи призмы. Слѣдовательно, видъ искривленнаго сѣченія одинаковъ при крученіи вокругъ различныхъ осей и положеніе его относительно касательной къ кривой, образуемой осью симметріи призмы, остается одно и то же.

# § 46. Изгибъ призмъ, одновременно съ крученіемъ и растяженіемъ или сжатіемъ.

Вопросъ объ одновременномъ изгибѣ, крученіи и вытяженіи призмъ рѣшенъ Санъ-Венаномъ подъ видомъ слѣдующей задачи.

Ищется какое либо изотропно-упругое тѣло призматическаго или цилиндрическаго вида съ основаніями, перпендикулярными къ длинѣ призмы. Одинъ элементъ этого тѣла закрѣпленъ такимъ образомъ, что онъ не можетъ получить ни поступательнаго движенія, ни вращенія. Предполагается:

I) что на тѣло не дѣйствуютъ никакія объемныя силы,

II) что къ боковой поверхности призмы не приложено никакихъ вѣшнихъ напряженій

III) и что во всей призмѣ  $N_1$ ,  $N_2$  и  $T_3$  равны нулю.

Требуется узнать, какія напряжения должно приложить къ основаніямъ призмы и какія деформация она получить.

Ось  $Z$ -овъ располагаемъ по оси призмы.

Въ силу предположенія III изъ выраженій (199) стр. 113 получимъ:

$$2K\varepsilon_1 + B\theta = 0, \quad 2K\varepsilon_2 + B\theta = 0, \quad 2g_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \dots\dots (237)$$

отсюда, изъ первыхъ двухъ слѣдуетъ:  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  и, далѣе, такъ какъ  $3B = 3R - 2K$ , то:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\kappa\varepsilon_3, \quad \kappa = \frac{1}{2} \frac{3R - 2K}{3R + K}; \dots\dots\dots (188)$$

поэтому:

$$N_3 = E\varepsilon_3 \dots\dots (238), \quad E = 2K(1 + \kappa) = \frac{9RK}{3R + K} \dots\dots (186)$$

и кубическое расширеніе единицы объема:  $\theta = (1 - 2\kappa)\varepsilon_3$ .

Дифференціальныя уравненія равновѣсія даютъ:

$$\frac{\partial g_2}{\partial z} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = 0, \dots\dots\dots (238)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial z} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0, \dots\dots\dots (239)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} + (1 + \kappa) \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial z} = 0; \dots\dots\dots (240)$$

но такъ какъ:

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2 \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2 \partial y} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z} = -2\kappa \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial z},$$

то послѣднее уравненіе можно представить еще такъ:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \dots\dots\dots (240, bis)$$

Шесть дифференціальных уравненій (207), (208) стр. 117, которыя должны удовлетворять  $\varepsilon$  и  $g$ , будутъ здѣсь (вслѣдствіе того что  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -x\varepsilon_3$ ,  $g_3 = 0$ , а производныя отъ  $g_1$  и  $g$ , по  $z$  равны нулю) имѣть слѣдующій видъ:

$$-x \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial y^2} = 0, \dots (207, 1), \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial z^2} = 0, \dots (207, 2)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x^2} = 0, \dots (207, 3), \quad -x \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial U}{\partial x^2}, \dots (208, 1)$$

$$-x \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \dots (208, 2), \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} = 0, \dots (208, 3)$$

гдѣ:

$$U = \frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial g_2}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} \right).$$

Изъ (207, 1, 2, 3) и (208, 3) слѣдуетъ, что  $\frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial y \partial x} = 0$ , а потому:

$$\varepsilon_3 = a + a_1 x + a_2 y + (b + b_1 x + b_2 y) z.$$

Далѣе, имѣя это выраженіе для  $\varepsilon_3$ , получимъ изъ (208, 1, 2) изъ (238) и (239):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x b_2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -x b_1, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0;$$

отсюда, интегрируя и введя произвольную постоянную  $\alpha$ :

$$U = \alpha + x (b_2 x - b_1 y),$$

или:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} = 2\alpha + 2x (b_2 x - b_1 y), \dots (241)$$

Теперь, имѣя выраженіе для  $\varepsilon_3$ , изъ (238), (239) и (240, his) получимъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -(a_1 + b_1 z), \dots (238), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -(a_2 + b_2 z), \dots (239)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2 (b + b_1 x + b_2 y), \dots (240)$$

а кромѣ того имѣемъ еще третье изъ (237), т. е.:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \dots (237)$$

а изъ него

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial x}, \dots (242)$$

Изъ послѣднихъ дифференціальныхъ уравненій (238), (239), (240), (242), (241) и (237) предстоитъ опредѣлить  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , удовлетворяющія еще слѣдующимъ условіямъ:

На боковой поверхности (наружная нормаль  $n$ ):

$$2g_2 \cos(n, X) + 2g_1 \cos(n, Y) = 0; \dots\dots\dots (243)$$

прочія два условія на боковой поверхности удовлетворены уже тѣмъ, что  $N_1 = N_2 = 0$ ; далѣе, на поверхностяхъ оснований:

$$X = \pm 2g_2 K, \quad Y = \pm 2g_1 K, \quad Z = \pm E z; \dots\dots\dots (244)$$

а кромѣ того (условія закрѣпленія одного изъ элементовъ тѣла):

$$\text{при } x = 0, y = 0, z = 0; u = 0, v = 0, w = 0, \dots\dots\dots (245)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = 0 \dots\dots\dots (246)$$

Имѣя выраженія:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} = -\kappa \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} = -\kappa (a_2 + b_2 z), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} = \kappa \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial x} = \kappa (a_1 + b_1 z), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= -\alpha - \kappa (b_2 x - b_1 y) \end{aligned}$$

и зная, что  $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = 0$ , найдемъ интегрированіемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha z - \kappa (\alpha_2 x - \alpha_1 y + b_2 z x - b_1 z y) \dots\dots\dots (245)$$

Имѣя выраженія:  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$  и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} = -\kappa \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial z} = -\kappa (b + b_1 x + b_2 y), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -(a_2 + b_2 z), \end{aligned}$$

получимъ интегрированіемъ, введя произвольную постоянную  $\beta_1$ :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \beta_1 - \alpha_1 z - b_1 \frac{z^2}{2} - \alpha y - \kappa b x - \kappa \left( b_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + b_2 xy \right) \dots\dots (246)$$

Имѣя выраженія:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} &= \alpha + \kappa (b_2 x - b_1 y), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z} = -\kappa \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial z} = -\kappa (b + b_1 x + b_2 y), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= -(a_2 + b_2 z), \end{aligned}$$

получимъ интегрированіемъ, введя произвольную постоянную  $\beta_2$ :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \beta_2 - a_2 z - b_2 \frac{z^2}{2} + \alpha x - \kappa by - \kappa \left( b_2 \frac{y^2 - x^2}{2} + b_1 xy \right) \dots (247)$$

Теперь имѣемъ:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_1 = -\kappa \epsilon_3$  и выраженія (245) и (246) двухъ другихъ производныхъ перваго порядка отъ  $u$ . Зная, что  $u_0 = 0$ , найдемъ интегрированіемъ:

$$u = \beta_1 z - a_1 \frac{z^2}{2} - b_1 \frac{z^3}{6} - \alpha yz - \kappa \left( ax + a_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + a_2 xy \right) - \\ - \kappa \left( bx + b_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + b_2 xy \right) \dots (248)$$

Потомъ, имѣемъ выраженія для трехъ производныхъ перваго порядка отъ  $v$  (потому что  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = -\kappa \epsilon_3$ ). Зная, что  $v_0 = 0$ , получимъ интегрированіемъ:

$$v = \beta_2 z - a_2 \frac{z^2}{2} - b_2 \frac{z^3}{6} + \alpha xz - \kappa \left( ay + a_1 xy + a_2 \frac{y^2 - x^2}{2} \right) - \\ - \kappa \left( by + b_1 xy + b_2 \frac{y^2 - x^2}{2} \right) \dots (249)$$

Наконецъ еще получимъ:

$$w = z (a + a_1 x + a_2 y) + \frac{z^2}{2} (b + b_1 x + b_2 y) + F(x, y), \dots (250)$$

гдѣ  $F(x, y)$  есть функція, удовлетворяющая слѣдующему дифференціальному уравненію:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2(b + b_1 x + b_2 y) \dots (250, 3)$$

Притомъ эта функція  $F$ , на основаніи условій (245) и (246), должна удовлетворять слѣдующимъ требованіямъ:

$$\text{при } x = 0, y = 0, F(0, 0) = 0, \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0; \dots (251)$$

а кромѣ того на контурѣ сѣченія она должна удовлетворять дифференціальному уравненію перваго порядка (243), гдѣ:

$$2g_1 = \frac{\partial F}{\partial y} + \beta_2 + \alpha x - \kappa \left( by + b_1 xy + b_2 \frac{y^2 - x^2}{2} \right) \dots (252)$$

$$2g_2 = \frac{\partial F}{\partial x} + \beta_1 - \alpha y - \kappa \left( bx + b_1 xy + b_2 \frac{x^2 - y^2}{2} \right) \dots (253)$$

Изъ числа постоянныхъ произвольныхъ, входящихъ въ полученныя выраженія, постоянное  $b$  можетъ быть выражено въ двухъ другихъ,  $b_1$  и  $b_2$ . Въ самомъ дѣлѣ, такъ



какъ уравненіе (243) должно быть удовлетворено во всѣхъ точкахъ контура сѣченія. то:

$$2 \int (g_2 \cos (n, X) + g_1 \cos (n, Y)) ds = 0,$$

гдѣ интегралъ распространенъ по всему контуру сѣченія призмы; по теоремѣ же, приведенной на стр. 126 (216), этотъ интегралъ преобразовывается въ слѣдующій интегралъ, распространенный по площади сѣченія:

$$\iint \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2x(b + b_1 x + b_2 y) \right) dx dy = 0, \dots\dots\dots (254)$$

вслѣдствіе же того, что функція  $F$  должна удовлетворять уравненію (240, 3), равенство (254) получаетъ слѣдующій видъ:

$$2(1 + x)(b + b_1 x_c + b_2 y_c) S = 0, \dots\dots\dots (255)$$

гдѣ  $S$  — величина площади сѣченія, а  $x_c$  и  $y_c$  — координаты центра тяжести этой площади.

Если начало координатъ и закрѣпленный элементъ находятся на линіи центровъ тяжести сѣченій, то  $x_c$  и  $y_c$  равны нулю, а потому тогда и  $b$  равно нулю.

Изъ остальныхъ постоянныхъ пять, а именно:  $a$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  могутъ быть опредѣлены по величинамъ проекцій  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  главнаго вектора и проекцій  $J_x$ ,  $J_y$ , главнаго момента вѣншихъ напряженій, приложенныхъ къ свободному основанію призмы.

Изъ двухъ основаній призмы одно ( $z = 0$ ) несвободно въ томъ отношеніи, что закрѣпленъ оди́нъ ничтожно-малый элементъ его, окружающій начало координатъ, прочіе же элементы этого основанія свободны; другое основаніе ( $z = l$ ) свободно во всѣхъ своихъ частяхъ безъ исключенія.

Составимъ выраженія:

$$B_x = \iint X dx dy, \quad B_y = \iint Y dx dy, \quad B_z = \iint Z dx dy,$$

$$J_x = \iint (yZ - lY) dx dy, \quad J_y = \iint (lX - xZ) dx dy,$$

гдѣ интегралы распространены по всей площади свободнаго основанія призмы. Такъ какъ на этой поверхности  $\cos (n, Z) = +1$ , то, по формуламъ (244):

$$X = 2g_2 K, \quad Y = 2g_1 K, \quad Z = E_{\varepsilon_3},$$

гдѣ нужно подставить  $l$  вмѣсто  $z$ .

Возьмемъ равенство (243), помножимъ его на  $x$  и возьмемъ интегралъ по контуру; помножимъ его другой разъ на  $y$  и также возьмемъ интегралъ по контуру; получимъ:

$$\int g_2 x \cos (n, X) dS + \int g_1 x \cos (n, Y) dS = 0$$

$$\int g_2 y \cos (n, X) dS + \int g_1 y \cos (n, Y) dS = 0.$$

Эти интегралы по формулѣ (216) могутъ быть преобразованы въ интегралы, распространенные по поверхности сѣченія, а потому получимъ слѣдующія равенства:

$$2 \iint g_2 dx dy = - 2 \iint \left( \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) x dx dy,$$

$$2 \iint g_1 dx dy = - 2 \iint \left( \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) y dx dy.$$

Такъ какъ изъ равенства (240) слѣдуетъ, что:

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} = - (1 + \kappa) (b + b_1 x + b_2 y),$$

то, на основаніи вышеизложеннаго, выраженія для  $B_x$ ,  $B_y$  получаютъ слѣдующій видъ:

$$B_x = 2 (1 + \kappa) K (b S x_c + b_1 \mathfrak{A} + b_2 \mathfrak{B}) = E (b_1 \mathfrak{A}_c + b_2 \mathfrak{B}_c), \quad (256, a)$$

$$B_y = 2 (1 + \kappa) K (b S y_c + b_1 \mathfrak{B} + b_2 \mathfrak{A}) = E (b_1 \mathfrak{B}_c + b_2 \mathfrak{A}_c), \quad (256, b)$$

гдѣсь:

$$\mathfrak{A} = \iint x^2 dx dy = \mathfrak{A}_c + S x_c^2, \quad \mathfrak{B} = \iint y^2 dx dy = \mathfrak{B}_c + S y_c^2$$

$$\mathfrak{K} = \iint xy dx dy = \mathfrak{K}_c + S x_c y_c,$$

т. е.  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  суть моменты инерціи площади основанія  $z = 0$  вокругъ осей  $Y$ -овъ и  $X$ -овъ, а  $\mathfrak{K}$  есть произведеніе инерціи этой площади относительно тѣхъ же осей;  $\mathfrak{A}_c$ ,  $\mathfrak{B}_c$  и  $\mathfrak{K}_c$  суть моменты и произведеніе инерціи относительно параллельныхъ осей, проведенныхъ черезъ центръ тяжести площади.

Далѣе, принявъ во вниманіе соотношеніе (255), найдемъ:

$$B_z = E (a + a_1 x_c + a_2 y_c) S \dots \dots \dots (256, c)$$

Въ выраженіяхъ моментовъ  $J_x$  и  $J_y$  взаимно сократятся на основаніи выраженій (256, а, b) члены, заключающіе  $l$ ; останется:

$$J_x = E (a s y_c + a_1 \mathfrak{F} + a_2 \mathfrak{B}), \dots \dots \dots (257.)$$

$$J_y = -E (a s x_c + a_1 \mathfrak{U} + a_2 \mathfrak{F}) \dots \dots \dots (257.)$$

Изъ равенствъ 256, а, b) получимъ слѣдующія выраженія для величинъ коэффicientовъ  $b_1$  и  $b_2$ :

$$b_1 = \frac{\mathfrak{B}_c B_x - \mathfrak{F}_c B_y}{E \mathfrak{U}_c \mathfrak{B}_c - \mathfrak{F}_c^2}, \quad b_2 = \frac{\mathfrak{U}_c B_y - \mathfrak{F}_c B_x}{E \mathfrak{U}_c \mathfrak{B}_c - \mathfrak{F}_c^2}, \dots \dots \dots (258.)$$

Изъ равенствъ (257, а, b) можно исключить  $a$  при помощи равенства (256, .) и затѣмъ полученныя уравненія рѣшить относительно  $a_1$  и  $a_2$ ; окажется:

$$a_1 = -\frac{J_y \mathfrak{B}_c + J_x \mathfrak{F}_c}{E \mathfrak{U}_c \mathfrak{B}_c - \mathfrak{F}_c^2} - \frac{B_z (\mathfrak{B}_c x_c - \mathfrak{F}_c y_c)}{E (\mathfrak{U}_c \mathfrak{B}_c - \mathfrak{F}_c^2)}, \dots \dots \dots (259)$$

$$a_2 = \frac{J_x \mathfrak{U}_c + J_y \mathfrak{F}_c}{E \mathfrak{U}_c \mathfrak{B}_c - \mathfrak{F}_c^2} + \frac{B_z (\mathfrak{F}_c x_c - \mathfrak{U}_c y_c)}{E (\mathfrak{U}_c \mathfrak{B}_c - \mathfrak{F}_c^2)}. \dots \dots \dots (260)$$

Эти формулы значительно упрощаются въ тѣхъ случаяхъ, когда закрѣпленъ центръ тяжести площади несвободнаго основанія призмы, а площади сѣченій симметричны относительно плоскости  $YZ$ , такъ что:  $x_c = 0, y_c = 0, \mathfrak{F}_c = 0$ ; тогда  $b = 0$  и пять постоянныхъ будутъ имѣть слѣдующія величины:

$$b_1 = \frac{B_x}{E \mathfrak{U}_c}, \quad b_2 = \frac{B_y}{E \mathfrak{B}_c}, \quad a_1 = -\frac{J_y}{E \mathfrak{U}_c}, \quad a_2 = \frac{J_x}{E \mathfrak{B}_c} \dots \dots \dots (261)$$

$$a = \frac{B_z}{E S} \dots \dots \dots (261)$$

Прежде чѣмъ опредѣлить постоянную  $a$ , слѣдуетъ опредѣлить видъ функціи  $F(x, y)$ . Замѣнимъ ее слѣдующею функціею:

$$F(x, y) = -\beta_1 x - \beta_2 y - \frac{b}{2} (x^2 + y^2) - b_1 xy - b_2 x^2 y + f(x, y); \quad (262)$$

новая функція  $f(x, y)$  должна будетъ удовлетворять (какъ слѣдуетъ изъ уравненій (240, 3)) уравненію втораго порядка съ частными производными:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \dots \dots \dots (263)$$

на контурѣ — слѣдующему уравненію съ частными производными перваго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{f'}{\partial n} = & a (y \cos(\mu, X) - x \cos(\mu, Y)) + (1 + \kappa) b (x \cos(\mu, X) + y \cos(\mu, Y)) + \\ & + b_1 \left[ \frac{\kappa x^2 + (2 - \kappa) y^2}{2} \cos(\mu, X) + (2 + \kappa) xy \cos(\mu, Y) \right] + \\ & + b_2 \left[ (2 + \kappa) xy \cos(\mu, X) + \frac{\kappa y^2 + (2 - \kappa) x^2}{2} \cos(\mu, Y) \right]; \dots \dots \dots (264) \end{aligned}$$

того, въ силу условій (251), функція  $f$  должна удовлетворять слѣдующимъ

$$\text{при } x = 0, y = 0: f(0, 0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x} = \beta_1, \frac{\partial f}{\partial y} = \beta_2 \dots \dots (265)$$

Можно показать, что для каждой площади существуетъ только одна функція, удовлетворяющая слѣдующимъ требованіямъ:

чтобы во всѣхъ точкахъ данной площади она и ея производныя были сплошными функциями координатъ и чтобы во всѣхъ точкахъ этой площади она удовлетворяла дифференціальному уравненію (263);

чтобы во всѣхъ точкахъ контура данной площади величина  $\frac{\partial f}{\partial n}$  была бы данною функцией координатъ точекъ этого контура;

чтобы  $f(0, 0)$  была равна нулю.

Для того, чтобы доказать это, возьмемъ слѣдующія формулы преобразованія координатъ:

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial f_1}{\partial x} dx dy &= \int f_1 \cos(\mu, X) ds, \\ \iint \frac{\partial f_2}{\partial x} dx dy &= \int f_2 \cos(\mu, Y) ds, \end{aligned}$$

гдѣ  $f_1$  и  $f_2$  суть сплошныя функции во всѣхъ точкахъ площади и применимъ ихъ къ функциямъ:

$$f_1 = f \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_2 = f \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Тогда получимъ; получится слѣдующее равенство:

$$\iint \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy + \iint f \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = \int f \frac{\partial f}{\partial n} ds \dots \dots (266)$$

Если теперь предположимъ, что для данной площади можно найти двѣ различныя функціи  $f$  и  $\varphi$ , удовлетворяющія вышесказаннымъ требованіямъ, то разность  $(f - \varphi)$  этихъ двухъ функций должна удовлетворять уравненію (263) во всѣхъ точкахъ площади и уравненію:  $\frac{\partial f}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$  на контурѣ, а потому, применивъ равенство (266) къ этой разности, получимъ:

$$\iint \left( \left( \frac{\partial (f - \varphi)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial (f - \varphi)}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy = 0.$$

Этотъ интегралъ отъ суммы квадратовъ можетъ быть равенъ нулю только тогда, когда во всѣхъ точкахъ площади и на контурѣ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

Значить  $f$  и  $\phi$  могли бы разниться только постоянною величиною, но такъ какъ и та и другая должны быть равны нулю въ началѣ координатъ, то онѣ должны быть тождественны на всей площади.

И такъ для каждой площади можно найти одну только функцию  $f$ , удовлетворяющую сказаннымъ требованіямъ.

Такъ какъ  $b = -(b_1 x_c + b_2 y_c)$ , то можно положить, что

$$f = \alpha \delta (x, y) + b_1 \phi_1 (x, y) + b_2 \phi_2 (x, y), \dots \dots \dots (267)$$

гдѣ  $\delta$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  суть три функции отъ  $x$  и  $y$ , которыя:

во всѣхъ точкахъ площади сѣченія должны удовлетворять дифференціальному уравненію (263),

на контурѣ производныя отъ нихъ по  $n$  должны быть равны слѣдующимъ выраженіямъ:

$$\frac{\partial \delta}{\partial n} = y \cos (n, X) - x \cos (n, Y) \dots \dots \dots (268)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = & \left( \frac{xy^2 + \frac{2}{2} x y^2}{2} - (1 + \kappa) x x_c \right) \cos (n, X) + \\ & + ((2 + \kappa) x - (1 + \kappa) x_c) y \cos (n, Y) \dots \dots \dots (269) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = & ((2 + \kappa) y - (1 + \kappa) y_c) x \cos (n, X) + \\ & + \left( \frac{xy^2 + \frac{2}{2} x y^2}{2} - (1 + \kappa) y y_c \right) \cos (n, Y); \dots \dots (270) \end{aligned}$$

въ началѣ координатъ, при  $x = 0$ ,  $y = 0$ , онѣ должны обращаться въ нуль.

Послѣ этого выраженія (252) и (253) получаютъ слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} 2g_1 = \alpha \frac{\partial \delta}{\partial y} + b_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + b_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \alpha x - b_1 ((2 + \kappa) x - (1 + \kappa) x_c) y - \\ - b_2 \left( \frac{xy^2 + \frac{2}{2} x y^2}{2} - (1 + \kappa) y_c y \right) \dots \dots \dots (252) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2g_2 = \alpha \frac{\partial \delta}{\partial x} + b_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \alpha y - b_1 ((2 + \kappa) y - (1 + \kappa) y_c) x - \\ - b_1 \left( \frac{xy^2 + \frac{2}{2} x y^2}{2} - (1 + \kappa) x_c x \right) \dots \dots \dots (253) \end{aligned}$$

Постоянная  $\alpha$  опредѣлится по величинѣ момента вокругъ оси  $Z$ -овъ вѣшнихъ напряженій, приложенныхъ къ свободному основанію призмы. Этотъ моментъ выразится такъ:

$$I_z = \iint (xY - yX) dx dy = K \iint 2 (xg_1 - yg_2) dx dy.$$

Подставивъ сюда вмѣсто  $2g_1$  и  $2g_2$  предыдущія выраженія и принявъ во вниманіе, что

$$\iint \left( x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx dy = \int_s (x \cos (n, Y) - y \cos (n, X)) ds,$$



из, на основаніи равенствъ (215) стр. 124:

$$\iint \left( x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx dy = -\frac{1}{2} \int f_s \frac{\partial r^2}{\partial s} ds,$$

изучимъ равенство, которое можно будетъ рѣшить относительно  $\alpha$ ; окажется

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - \frac{1}{2} \int \alpha dr^2 &= \frac{J_z}{K} + \frac{b_1}{2} \left( \int \Phi_1 dr^2 + (\alpha + 4) S_{21} + (\alpha - 2) S_{03} \right) \\ &+ \frac{b_2}{2} \left( \int \Phi_2 dr^2 + (\alpha + 4) S_{12} + (\alpha - 2) S_{20} \right), \dots \quad (271) \end{aligned}$$

гдѣ:

$$S_{20} = \iint x^2 dx dy, \quad S_{21} = \iint x^2 y dx dy,$$

$$S_{03} = \iint y^2 dx dy, \quad S_{12} = \iint x y^2 dx dy.$$

Два постоянныя  $\beta_1$  и  $\beta$ , опредѣляются согласно съ формулами (265) послѣ того, какъ найдены будутъ функции  $\delta$ ,  $\Phi_1$  и  $\Phi$ , для данного сѣченія.

Для того, чтобы дать нѣкоторое понятие относительно значенія постоянныхъ или коэффициентовъ  $a$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , остановимся нѣсколько на полученныхъ формулахъ.

Условимся называть *волокнами* призмы тѣ линіи, которыя въ предварительномъ состояніи были параллельны оси  $Z$ -овъ; подъ *осевымъ волокномъ* будемъ подразумѣвать то, которое совпадало съ осью  $Z$ -овъ и одинъ конецъ котораго закрѣпленъ въ основаніи  $z = 0$ ; *центральнымъ волокномъ* будемъ называть то, которое проходитъ черезъ центры тяжести сѣченій; если  $x_c$  и  $y_c$  равны нулю, то центральное волокно есть вмѣстѣ съ тѣмъ и осевое.

Коэффициенты сдвиговъ  $2g_1$  и  $2g_2$  суть вмѣстѣ съ тѣмъ и косинусы угловъ, составляемыхъ направленіями искривленныхъ волоконъ съ тѣми линіями площадей сѣченій, которыя были параллельны осямъ  $Y$ -овъ и  $X$ -овъ. Такъ какъ  $2g_1$  и  $2g_2$  независимы отъ  $z$ , то отсюда слѣдуетъ, что *каждое искривленное волокно наклонено одинаково ко всемъ искривленнымъ сѣченіямъ въ тѣхъ точкахъ, въ которыхъ оно ихъ пересѣкаетъ*.

При  $x = 0$  и  $y = 0$  коэффициенты  $2g_1$  и  $2g_2$  обращаются въ  $\beta$ , и  $\beta_1$  (см. (252) и (253) стр. 145), слѣдовательно  $\beta_2$  и  $\beta_1$  суть косинусы угловъ, составляемыхъ искривленнымъ осевымъ волокномъ съ тѣми направленіями въ каждомъ сѣченіи, которыя были предварительно параллельны осямъ  $Y$ -овъ и  $X$ -овъ.

Уравненія искривленнаго осевого волокна получаются по исключеніи  $z$  изъ равенствъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= \beta_1 z - \frac{a_1}{2} z^2 - \frac{b_1}{6} z^3, \quad y = \beta_2 z - \frac{a_2}{2} z^2 - \frac{b_2}{6} z^3, \\ z &= z(1 + a) - (b_1 x_c + b_2 y_c) \frac{z^2}{2}, \end{aligned} \right\} \dots \dots (272)$$

которые получаются изъ выражений:  $x = u$ ,  $y = v$ ,  $z = w$ , если въ  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , выражаемыхъ формулами (248—250), сдѣлать  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

Изъ этихъ равенствъ видно, что если осевое волокно есть вмѣстѣ съ тѣмъ и центральное волокно, то оно имѣетъ видъ кривой 3-го порядка, если же  $b_1$  и  $b_2$  равны нулю, то осевое волокно есть кривая второго порядка.

Подставивъ въ формулахъ (248—250)  $x_c$  и  $y_c$  вмѣсто  $x$  и  $y$  и присоединивъ полученныя выраженія для  $u$ ,  $v$ ,  $w$  къ  $x_c$ ,  $y_c$  и  $z$ , получимъ выраженія координатъ точекъ центральнаго волокна въ деформированномъ состояніи; принявъ во вниманіе равенство (255) и (256, с) получимъ слѣдующія уравненія этого волокна:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_c + B_1 z - a_1 \frac{z^2}{2} - b_1 \frac{z^3}{6} \\ y &= y_c + B_2 z - a_2 \frac{z^2}{2} - b_2 \frac{z^3}{6} \\ z &= F(x_c, y_c) + z(1 + a'); \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (273)$$

зтѣсь, для краткости, нѣкоторыя суммы обозначены однимъ знакомъ, а именно:

$$\begin{aligned} x_c &= x_c - \frac{B_z}{SE} x x_c + a_1 (x_c^2 + y_c^2) \frac{x}{2}, \quad B_1 = \beta_1 - \alpha y_c + b_1 (x_c^2 + y_c^2) \frac{x}{2}, \\ y_c &= y_c - \frac{B_z}{SE} y y_c + a_2 (x_c^2 + y_c^2) \frac{y}{2}, \quad B_2 = \beta_2 + \alpha x_c + b_2 (x_c^2 + y_c^2) \frac{y}{2}, \end{aligned}$$

кромя того, отношеніе  $(B_z : SE)$  означено черезъ  $a'$ .

Изъ этихъ уравненій видно, что  $a'$  представляетъ удлиненіе единицы центральнаго волокна по оси  $Z$ -овъ; если начало центральнаго волокна закрѣвлено, такъ что  $x_c$  и  $y_c$  равны нулю, то  $a'$  равно  $\alpha$ ; во всякомъ случаѣ  $a'$  представляетъ удлиненіе всего центральнаго волокна по оси  $Z$ -овъ.

Если провести черезъ центръ тяжести основанія  $z = 0$  касательную къ искривленному центральному волокну, то координаты  $x$  и  $y$  точекъ этой прямой выразятся суммами  $x_c + B_1 z$  и  $y_c + B_2 z$ . Возьмемъ на этой прямой такую точку, для которой  $z = l$ . Разность между координатами по осямъ  $X$  и  $Y$  свободного конца центральнаго волокна и координатами упомянутой сейчасъ точки, т. е. величины:

$$- a_1 \frac{l^2}{2} - b_1 \frac{l^3}{6}; \quad - a_2 \frac{l^2}{2} - b_2 \frac{l^3}{6},$$

называются стрѣлками изгиба центральнаго волокна по осямъ  $X$ -овъ и  $Y$ -овъ.

Изъ четырехъ коэффициентовъ  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ , опредѣляющихъ величины стрѣлокъ изгиба, два послѣдніе, какъ видно изъ формулъ (255) стр. 148, зависятъ отъ величинъ проэкцій  $B_x$ ,  $B_y$  главнаго вектора напряженій, приложенныхъ къ свободному основанію, и равны нулю, когда эти проэкціи равны нулю; тогда центральное волокно есть кривая второго порядка.

Два другіе коэффициента  $a_1$  и  $a_2$ , какъ видно изъ формулъ (259) и (260) зависятъ отъ моментовъ  $I_x$  и  $I_y$ , и кромѣ того зависятъ еще отъ  $a'$  или отъ  $B_z$ , если центръ тяжести несвободнаго основанія не закрѣвленъ.

Коэффициентъ  $\alpha$  есть коэффициентъ крученія; онъ, какъ видно изъ формулы (271), виситъ не только отъ  $L_z$ , но и еще отъ  $b_1$  и  $b_2$ , такъ что закручиваніе можетъ происходить и при  $L_z$  равномъ нулю подъ вліяніемъ изгибающихъ силъ, если только нованія призмъ не симметричны относительно плоскостей  $ZX$  и  $ZY$ .

Обратимся теперь къ разысканію нѣкоторыхъ контуровъ, для которыхъ видъ ихъ трехъ функций  $\zeta$ ,  $\phi_1$ ,  $\varphi$ , можетъ быть опредѣленъ.

Прежде всего замѣтимъ, что функція  $\zeta(x, y)$  должна удовлетворять такимъ же минимъ требованіямъ, каковыя должна была удовлетворять функція  $w$  въ задачѣ о крученіи призмъ. Пусть  $\Phi(x + yi)$  есть какая либо функція отъ комплексной переменной,  $\phi(x, y)$  дѣйствительная, а  $\zeta(x, y)$  мнимая части этой функціи. Уравненіе (268), которому должна удовлетворять функція  $\zeta$  на контурѣ, можетъ быть представлено въ слѣдующимъ видѣ:

$$\frac{d\psi}{ds} + \frac{1}{2} \frac{dr^2}{ds} = 0;$$

следовательно, на площади, ограниченной контуромъ выражаемымъ уравненіемъ:  $\psi + r^2 = C$ , функціею  $\zeta$  можетъ служить мнимая часть той функціи, дѣйствительная часть которой есть  $\psi$ .

Сумма:

$$\begin{aligned} & A_1 r \cos \theta + A_2 r^2 \cos 2\theta + A_3 r^3 \cos 3\theta + A_4 r^4 \cos 4\theta + \dots \\ & + B_1 r \sin \theta + B_2 r^2 \sin 2\theta + B_3 r^3 \sin 3\theta + B_4 r^4 \sin 4\theta + \dots \end{aligned}$$

можетъ быть мнимою частью функціи отъ комплексной переменной и можетъ служить функціею  $\zeta$  для нѣкотораго контура; видъ этого контура мы всегда въ состояніи опредѣлить.

Будемъ теперь искать видъ тѣхъ контуровъ, для которыхъ  $\phi_1$  и  $\varphi$  выражаются тоже суммами подобнаго же вида.

Чтобы функція  $\phi_1(x, y)$  выражалась суммою членовъ приведеннаго выше вида, необходимо, чтобы эта сумма удовлетворяла уравненію (269) на контурѣ, такъ какъ она уже завѣдомо удовлетворяетъ уравненію (263) во всѣхъ точкахъ плоскости.

Мы будемъ предполагать, что  $x_c$  и  $y_c$  равны нулю.

Коэффициенты  $A$  и  $B$  мы подчинимъ тому условію, чтобы выраженіе:

$$\left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \frac{xx^2 + (2-x)y^2}{2} \right) \frac{\partial y}{\partial s} + \left( (2+x)xy - \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \frac{dx}{ds},$$

по умноженіи на надлежащій интегрирующій множитель  $V$ , приводилось бы къ виду:

$$\frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{\partial s},$$

дѣ  $\psi$  есть какая либо функція отъ  $x$  и  $y$ .

Не трудно убѣдиться въ томъ, что безъ интегрирующаго множителя здѣсь обойтись нельзя.

Посмотримъ, не можетъ ли быть интегрирующій множитель функціею одного только  $y$ .

Интегрирующий множитель двучленного дифференциального выражения  $Xdx + Ydy$ , не заключающий  $x$ , долженъ удовлетворять дифференциальному уравненію:

$$V\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = X \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Въ настоящемъ случаѣ это послѣднее будетъ:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - 2(1+x)y V = \left((2+x)xy - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \frac{\partial V}{\partial y},$$

но, такъ какъ  $\varphi_1$  удовлетворяетъ дифференциальному уравненію (263), а  $V$  есть функция только отъ  $y$ , то отсюда слѣдуетъ, что выраженіе

$$\frac{1}{x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - (2+x)y$$

должно быть функциею только отъ  $y$ , а слѣдовательно и дѣленная на  $x$  частная производная отъ  $\varphi_1$  по  $y$  не должна заключать  $x$ . Для этого должны быть равны нулю слѣдующіе изъ коэффициентовъ вышеприведенной суммы:

$$A_2, A_4, A_6, \dots, B_1, B_3, B_5, B_7, \dots$$

Поэтому  $\varphi$ , можетъ имѣть такой видъ:

$$\varphi_1 = A_1 x + 2B_2 xy + A_3(x^2 - 3xy^2).$$

Дифференциальное уравненіе, которому долженъ удовлетворять множитель  $V$ , будетъ такое:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1+x}{B_2 - \left(3A_3 + \frac{2+x}{2}\right)y};$$

интегрируя его найдемъ, что интегрирующий множитель долженъ быть слѣдующій:

$$V = \left(B_2 + \frac{1+x}{n}y\right)^n, \quad n = -\frac{1+x}{3A_3 + \frac{2+x}{2}}.$$

Выразимъ  $A_3$  въ  $n$  и  $x$  и вмѣсто  $y$  введемъ переменную  $\eta$ :

$$\eta = B_2 + \frac{1+x}{n}y, \quad 3A_3 = -\frac{2+x}{2} - \frac{1+x}{n},$$

тогда дифференциальное уравненіе, умноженное на  $V$ , получитъ слѣдующій видъ:

$$\left(C - \frac{2\pi n^2 B_2}{(1+x)^2} \eta + \frac{xn + (1+x)}{(1+x)^2} n\eta\right) \frac{1}{1+x} \eta^n d\eta = d(x^2 \eta^{n+1}),$$

$$C = A_1 + \frac{xn - (1+x)}{(1+x)^2} n B_2^2.$$

По интегрированіи и по раздѣленіи на  $\tau$  въ степени  $(n+1)$ , получимъ, означивъ новую постоянную произвольную черезъ  $D$ :

$$\frac{Cn}{(1+x)(n+1)} - \frac{2xn^3 B_2}{(1+x)^3 (n+2)} \tau + \frac{(xn - (1+x)) n^2}{(1+x)^3 (n+3)} \tau^2 - x^2 = \frac{D}{\tau^{n+1}}. \quad (274)$$

Мы предположили, что центр тяжести площадей, окаймленныхъ разсматриваемымъ контуромъ, находится въ началѣ координатъ. Такъ какъ уравненія полученныхъ контуровъ заключаютъ только  $x^2$  и болѣе никакихъ другихъ степеней этой переменной, то очевидно, что контуры симметричны относительно оси  $Y$ -овъ и что стало бытъ  $C = 0$ . Можно было бы разсмотрѣть, при какихъ условіяхъ  $y_c$  будетъ также равно нулю; но мы ограничимся только тѣми изъ полученныхъ нами контуровъ, которые имѣютъ очевидную симметрію также и относительно оси  $X$ -овъ. Это тѣ кривыя, которые получаются при  $B_2$  равномъ нулю и при такихъ значеніяхъ  $(n+1)$ , которые даютъ замкнутый контуръ, составленный либо изъ одной непрерывной кривой, какъ эллипсъ, либо изъ частей различныхъ кривыхъ, соответствующихъ одному и тому же  $(n+1)$ .

При  $B_2$  равномъ нулю уравненіе (274) получаетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{A_1 n}{(1+n)(1+x)} + \left(1 + \frac{xn}{1+x}\right) \frac{y^2}{n+3} - x^2 = \frac{D_1}{y^{n+1}} \dots \dots \dots (274)$$

Функция  $\varphi_1$  слѣдующій видъ:

$$\varphi_1(x, y) = A_1 x + \left(\frac{2+x}{2} + \frac{1+x}{n}\right) \left(xy^2 - \frac{x^3}{3}\right) \dots \dots \dots (275)$$

1. Прежде всего остановимся на тѣхъ случаяхъ, когда  $D_1 = 0$  и когда уравненіе (274) выражаетъ эллипсъ:  $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ . Для этого надо, чтобы были:

$$\frac{A_1 n}{(1+n)(1+x)} = a^2, \quad \frac{A_1 n (n+3)}{(n+1)(xn + (1+x))} = -b^2$$

откуда слѣдуетъ, что  $n$  и  $A_1$  должны имѣть слѣдующія величины:

$$n = -(1+x) \frac{b^2 + 3a^2}{b^2 x + a^2 (1+x)}, \quad A_1 = a^2 \frac{b^2 + 2(1+x)a^2}{b^2 + 3a^2}$$

$\varphi_1(x, y)$  выражается такъ:

$$= \frac{1}{b^2 + 3a^2} \left( (b^2 + 2(1+x)a^2) a^2 x + ((2-x)b^2 + (1+x)a^2) \frac{3xy^2 - x^3}{6} \right). \quad (276)$$

Замѣнивъ здѣсь  $x, y, a$  и  $b$  черезъ  $y, x, b$  и  $a$ , получимъ выраженіе функціи  $\varphi_2$  для того же самаго эллипса, какъ видно изъ сравненія между собою выраженій (276) и (270) стр. 150; такъ получимъ:

$$\frac{1}{a^2 + 3b^2} \left( (a^2 + 2(1+x)b^2) b^2 y + ((2-x)a^2 + (1+x)b^2) \frac{3xy^2 - y^3}{6} \right). \quad (277)$$



Кромѣ того намъ уже извѣстно, что для того же эллипса функція  $\Sigma(x, y)$  должна имѣть слѣдующій видъ:

$$\Sigma = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy \dots \dots \dots (278)$$

Теперь, зная эти три функціи для эллипса, можемъ исполнить рѣшить задачу о деформации эллиптического цилиндра:  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  при слѣдующихъ обстоятельствахъ:

Закрѣплены: центръ основанія  $z = 0$ , элементъ линіи, совпадающей съ осью  $X$ -овъ, и элементъ площадки, совпадающей съ плоскостью  $XU$  (оба эти элемента должны заключать въ себѣ центръ основанія, т. е. начало координатъ); боковая поверхность цилиндра неподвержена вѣншиимъ напряженіямъ, вѣншія напряжения приложены только къ незакрѣпленнымъ частямъ основанія  $z = 0$  и къ основанію  $z = l$  и притомъ такимъ образомъ, что проэкции на оси координатъ главнаго вектора и главнаго момента (вокругъ начала координатъ) вѣншихъ напряженій, приложенныхъ къ основанію  $z = l$ , имѣютъ заданныя величины  $B_x, B_y, B_z, L_x, L_y, L_z$ .

Имѣя выраженія (276—278) получимъ коэффициенты  $\beta_1$  и  $\beta_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 &= b_1 \frac{b^2 + 2(1 + \kappa) a^2}{b^2 + a^2} a^2 \\ \beta_2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 &= b_2 \frac{a^2 + 2(1 + \kappa) b^2}{a^2 + b^2} b^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (279)$$

Затѣмъ мы найдемъ для одного изъ интеграловъ, входящихъ въ равенство (271), слѣдующее выраженіе:

$$\frac{1}{2} \int \Sigma dr^2 = \int \Sigma (y \cos(\mu, X) - x \cos(\mu, Y)) ds = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (\mathfrak{B}_c - \mathfrak{U}_c),$$

другіе два интеграла окажутся выраженными въ  $S_3, S_{21}, S_{12}, S_{03}$ , а эти интегралы для площади, симметричной относительно обѣихъ осей, равны нулю.

Поэтому  $\alpha$  выразится такъ (см. 271):

$$\alpha = \frac{I_z}{K} \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3}, \dots \dots \dots (219)$$

т. е. такъ же, какъ и въ случаѣ простаго закручиванія этого цилиндра.

Остальные пять коэффициентовъ:  $a_1, a_2, b_1, b_2$  и наконецъ коэффициентъ  $a$ , который, для отличія отъ большой полуоси эллипса, означимъ черезъ  $a_3$ , выразятся по формуламъ (261):

$$b_1 = \frac{4B_x}{E\pi a^3 b}, \quad b_2 = \frac{4B_y}{E\pi a b^3}, \quad a_1 = -\frac{4L_y}{E\pi a^3 b}, \quad a_2 = \frac{4L_x}{E\pi a b^3}, \quad a_3 = \frac{B_z}{E\pi a b}.$$

Разсмотримъ деформацію этого цилиндра въ томъ случаѣ, когда напряжения, приложенныя къ свободному его основанію направлены параллельно оси  $Y$ -овъ и распре-

члены симметрично относительно плоскости  $YZ$ , такъ что  $B_x$ ,  $I_y$ ,  $B_z$  и  $I_z$  равны нулю, а  $I_x = -lB_y$ , такъ какъ у всѣхъ напряженій одно и то же плечо:  $l$ .

Въ такомъ случаѣ  $b_1$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\beta_1$  и  $\alpha$  равны нулю, а функція  $F(x, y)$  имѣетъ слѣдующій видъ:

$$F(x, y) = -\frac{b_2}{2(a^2 + 3b^2)} \left[ (x^2 + (2-x)b^2)x^2y + ((2-x)a^3 + (4+x)b^3)\frac{y^3}{3} \right]. \quad (280)$$

и перемѣщенія точекъ выражаются такъ:

$$\left. \begin{aligned} u &= xb_2(l-z)xy, \quad w = b_2\left(\frac{z}{2} - l\right)zy + F(x, y) \\ v &= xb_2(l-z)\frac{y^2-x^2}{2} + \beta_2z + b_2\left(l - \frac{s}{3}\right)\frac{z^2}{2} \end{aligned} \right\}; \dots\dots (H)$$

отсюда, координаты точекъ въ деформированномъ состояніи выразятся слѣдующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(1 + b_2x(l-z)y), \\ y &= y + b_2x(l-z)\frac{y^2-x^2}{2} + \beta_2z + b_2\left(l - \frac{s}{3}\right)\frac{z^2}{2}, \\ z &= z + \left(b_2\left(\frac{z}{2} - l\right)z + \frac{F(x, y)}{y}\right)y. \end{aligned} \right\} \dots\dots (281)$$

Положивъ въ этихъ формулахъ  $y = 0$ , найдемъ:  $x = x$ ,  $z = z$ ; это значитъ, что всѣ волокна, бывшія сначала въ плоскости  $YZ$ , остались въ своихъ вертикальныхъ плоскостяхъ и не получили удлиненій по оси  $Z$ -овъ, онѣ перемѣстились только по оси  $Y$ -овъ и получили видъ кривыхъ, выражаемыхъ уравненіями:

$$y = b_2 \left( x^2 + l\frac{x^2}{2} + \frac{\beta_2}{b_2}z + \left(l - \frac{z}{3}\right)\frac{z^2}{2} \right), \dots\dots (282)$$

если разсматривать  $x$  какъ постоянныя; если же разсматривать  $x$  какъ переменное, то это равенство есть уравненіе той поверхности, въ которую обращается сѣченіе цилиндра плоскостью  $XU$  при деформациі его; линія пересѣченія этой поверхности всѣкою плоскостью, перпендикулярною къ оси  $Z$ -овъ, есть обыкновенная парабола, ось которой направлена по отрицательной оси  $Y$ -овъ, вершина которой находится въ точкѣ пересѣченія этой плоскости центральнымъ волокномъ, а полупараметръ равенъ единицѣ, дѣленной на  $b_2x(l-z)$ . Эти параболы представляютъ деформированное состояние большихъ осей площадей поперечныхъ сѣченій призмы; полупараметръ параболы закрѣпленнаго основанія наименьшій, между тѣмъ какъ большая полуось свободнаго основанія остается прямолинейною.

При  $x = 0$  равенство (282) обращается въ уравненіе центрального волокна; это — парабола третьяго порядка:

$$y = b_2 \left( \frac{a^2 + 2}{a^2 + 3b^2} + \frac{1+x}{b^2}b^2z + \left(l - \frac{z}{3}\right)\frac{z^2}{2} \right), \dots\dots (283)$$

Въ началѣ координатъ касательная къ ней составляетъ съ осью  $Z$ -овъ уголъ, тангенсъ котораго равенъ  $\beta_2$ . Если считать разстояние  $\eta$  точекъ этой кривой параллельно оси  $Y$ -овъ отъ этой касательной, то разстояние свободного конца центрального волокна окажется равнымъ:

$$k = b_2 \frac{l^3}{3}$$

независимо отъ размѣровъ эллипса, при той же величинѣ  $b_2$ . Уголъ, составляемый съ осью  $Z$ -овъ касательными, проведенными въ разныхъ точкахъ волокна, непрерывно возрастаетъ отъ начала координатъ и до конца его, какъ видно изъ выражения:

$$\frac{dy}{dz} = \beta_2 + (l - \frac{z}{2}) / b_2.$$

Радиусъ кривизны волокна имѣетъ безконечно-большую величину на свободномъ концѣ его.

Положивъ въ уравненіяхъ (281)  $z$  постояннымъ (положимъ  $z = c$ ), будемъ имѣть выраженія координатъ точекъ призмы, находящихся сначала на одномъ и томъ же поперечномъ сѣченіи цилиндра: исключивъ  $x$  и  $y$  изъ этихъ выраженій, получимъ уравненіе поверхности, образуемой искривленнымъ сѣченіемъ: поверхность эта третьего порядка.

Перенесемъ начало координатъ на время въ точку пересѣченія разсматриваемой поверхности съ центральнымъ волокномъ ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = c$ ): означивъ новые координаты черезъ  $\eta$  и  $\zeta$ , получимъ слѣдующія выраженія:

$$x = x (1 + b_2 \times (l - c) y), \quad \eta = y + b_2 \times (l - c) \frac{y^2}{2} - \frac{\tau^2}{2},$$

$$\zeta = b_2 \left( \frac{c}{2} - l \right) c y + F(xy).$$

Возьмемъ за новую ось  $Z$ -овъ касательную къ центральному волокну въ новомъ началѣ координатъ и за новую ось  $Y$ -овъ нормаль къ этому волокну въ той же точкѣ, направленную къ центру кривизны. Новая ось  $Z$ -овъ будетъ составлять съ прежнею уголъ  $\varphi$ , синусъ и косинусъ котораго выразятся, пренебрегая квадратами и высшими степенями  $b_2$ , такъ:

$$\cos \varphi = 1, \quad \sin \varphi = \beta_2 - \left( \frac{c}{2} - l \right) c b_2.$$

Означивъ новыя координаты поверхности черезъ  $\eta$  и  $\zeta$ , найдемъ, что онѣ выразятся, пренебрегая вторыми и высшими степенями  $b_2$ , такими формулами:

$$\eta = \eta \cos \varphi - \zeta \sin \varphi = y + b_2 \times (l - c) \frac{y^2 - x^2}{2}, \dots (284. b)$$

$$\zeta = \zeta \cos \varphi + \eta \sin \varphi = \beta_2 y + F(x, y): \dots (284. c)$$

къ этимъ двумъ формуламъ должно присоединять еще выраженіе для  $x$ ; назовемъ эту координату черезъ  $\tau$ .

$$\tau = x = x (1 + b_2 \times (l - c) y) \dots (284. a)$$

По исключеніи  $x$  и  $y$  изъ этихъ трехъ выраженій и пренебрегая вторыми степенями  $b$ , получимъ слѣдующее уравненіе поверхности искривленнаго сѣченія въ новыхъ координатахъ:  $z = \beta_2 y + F(x, y)$ , то есть:

$$(ka^2 + (2 - k)b^2)x^2 + ((2 - k)a^2 + (4 + k)b^2)y^2 = \\ = 2(a + 2 - 1 + k)b^2b - \frac{2}{l_2} \frac{a^2 + 3b^2}{b} z \dots \dots (285)$$

Такое уравненіе поверхности искривленнаго сѣченія получили мы, пренебрегая вторыми и высшими степенями  $b$ ; это уравненіе не заключаетъ  $c$ , поэтому можемъ сказать слѣдующее:

Если стрѣлка  $k$  изгиба призмы настолько мала, что представляется возможнымъ пренебречь вторыми и высшими степенями величины:

$$\frac{a}{b_2} b_2,$$

то, пренебрегая такими степенями этой величины, можемъ считать, что ось сѣченія призмы имѣетъ одинъ и тотъ же видъ при деформированномъ состояніи.

Видъ поверхности (285) такой, что если пересѣчемъ ее плоскостью  $z = 0$ , то получимъ въ пересѣченіи: прямую  $y = 0$  и эллипсъ, полуось котораго, расположенная по новой оси  $Y$ -овъ, болѣе  $b$ .

Плоскости, проведенная черезъ новую ось  $X$ -овъ подъ угломъ къ новой оси  $Y$ -овъ не болѣе  $\arctg \beta_2$ , пересѣчетъ эту поверхность третьяго порядка по некоторому эллипсу, подобному тому, который образуется пересѣченіемъ поверхности плоскостью  $z = 0$ : при углѣ наклоненія, равномъ  $\arctg \beta_2$ , эллипсъ обращается въ точку  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ . Съ другой стороны, если провести какую либо плоскость, пересѣкающую плоскость  $YZ$  во второмъ и четвертомъ квадрантахъ, то получимъ опять эллипсы, подобныя вышеописаннымъ.

Слѣдовательно, ось тѣхъ плоскостей, проведенныхъ черезъ новую ось  $X$ -овъ, которыя пересекаютъ поверхность (285), пересекаютъ ее по подобнымъ между собою эллипсамъ; плоскость, касательная къ поверхности въ началѣ координатъ, имѣетъ нормалью прямую, составляющую уголъ  $\arctg \beta_2$  съ новою положительною осью  $Z$ -овъ и уголъ  $\arccotg \beta_2$  съ отрицательною новою осью  $Y$ -овъ.

Топографическія кривыя линія, образуемыя пересѣченіями поверхности (285) плоскостями, перпендикулярными къ новой оси  $Z$ -овъ, выражаются уравненіями, которыя получимъ изъ (285), сдѣлавъ въ немъ  $z$  равнымъ  $\pm n$ ; изъ этихъ уравненій:  $\pm n = \beta_2 y + F(x, y)$  видно, что топографическія кривыя симметричны относительно плоскости  $YZ$  и что топографическая линія, соответствующая какому либо положительному ( $+n$ ), находится вся на сторонѣ положительныхъ  $Y$ -овъ, а топографическая линія, соответствующая такому же отрицательному  $n$ , находится вся на сторонѣ отрицательныхъ  $Y$ -овъ и притомъ расположена симметрично съ первою относительно плоскости  $XZ$ .

Для круговаго цилиндра, когда  $a = b = R$ , уравненіе (285) получаетъ слѣдующій видъ:

$$x^2 + y^2 - (3 + 2k)R^2 - \frac{4R^2}{b_2} \frac{z}{b} \dots \dots \dots (286)$$

причем  $\beta_1$  равно  $(3 + 2\kappa) b_2 R^2$  дѣленному на 4. Здѣсь всѣ сѣченія поверхности плоскостями, проведенными через новую ось  $X$ -овъ, суть круги, причемъ въ числѣ этихъ сѣченій оказывается и периметръ самага поперечнаго сѣченія призмы, т. е. кругъ радиуса  $R$ ; онъ заключается въ плоскости, нормаль къ которой составляетъ съ осью  $Z$ -овъ уголъ, имѣющій тангенсомъ половину  $(1 + \kappa) b_2$ ; кругъ, образуемый пересѣченіемъ поверхности плоскостью  $XU$ , имѣетъ радиусъ равный  $R\sqrt{3 + 2\kappa}$ .

Уравненія топографическихъ линій въ этомъ случаѣ можно представить такъ:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 - (3 + 2\kappa) \frac{r}{R} \pm \frac{4n}{b_2 R \cos \theta} = 0,$$

гдѣ  $\theta$  есть уголъ, составляемый направлениемъ радиуса вектора кривой съ положительною осью  $Y$ -овъ.

Рѣшая это уравненіе третьей степени относительно  $r$ , находимъ для каждаго  $n$ , не большаго нѣкотораго предѣла, три дѣйствительныя значенія  $r$ :

$$\frac{r_1}{R} = 2\sqrt{\frac{3 + 2\kappa}{3}} \cos \omega, \quad \frac{r_2}{R} = 2\sqrt{\frac{3 + 2\kappa}{3}} \cos\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right), \quad \frac{r_3}{R} = 2\sqrt{\frac{3 + 2\kappa}{3}} \cos\left(\omega + \frac{4\pi}{3}\right),$$

гдѣ:

$$\cos 3\omega = \mp \frac{2n}{b_2 R \cos \theta} \left(\frac{3}{3 + 2\kappa}\right)^{\frac{3}{2}}, \dots\dots\dots (287)$$

при всякомъ такомъ  $\theta$ , косинусъ котораго дѣляетъ вторую часть выраженія (287) меньшею единицы.

Предѣльная величина для  $n$  — слѣдующая:

$$n = \frac{b_2 R}{2} \left(\frac{3 + 2\kappa}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

топографическія кривыя, соответствующія этимъ величинамъ  $n$ , обращаются въ точки, находящіяся на оси  $Y$ -овъ.

На чертежѣ 34-мъ изображены топографическія линіи поверхности (286) не только внутри круга радиуса  $R$ , но и внѣ его, такъ изображенъ и кругъ радиуса  $R\sqrt{3 + 2\kappa}$ , служащій выѣтъ съ осью  $X$ -овъ. топографическою линіею  $n = 0$  поверхности. На этомъ чертежѣ проведена еще линія черезъ центръ круга, представляющая кривую пересѣченія искривленнаго сѣченія новою плоскостью  $YZ$ .

2. Надъ всѣми прочими замкнутыми контурами, которыя выражаются уравненіями вида (274), мы столь подробно останавливаться не будемъ. Замѣтимъ только, что для нихъ приходится ограничиваться только рѣшеніемъ вопроса объ изгибѣ призмы напряженіями, параллельными оси  $Y$ -овъ и симметрично распределенными по обѣ стороны плоскости  $YZ$ ; для всѣхъ этихъ замкнутыхъ симметричныхъ контуровъ перемѣщенія точекъ призмы выражаются формулами (H); выраженія координатъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  при изгибѣ призмы формулами (281), уравненіе центрального волокна — формулою (283), уравненіе поверхности, образуемой волокнами неполучившими удлиненія — формулою (282), уравненіе поверхности сѣченій, пренебрегая квадратами и высшими степенями  $b_2$ , будетъ выражаться уравненіемъ  $z = \beta_2 y + F(r, \varphi)$ . Разница будетъ въ коэффициентахъ функціи  $F$  и въ величинахъ  $\beta_2$  и  $\mathcal{A}_c$ ,  $\mathcal{B}_c$ .



Для всѣхъ этихъ случаевъ:

$$f = b_2 \varphi_2, \quad \varphi_2 = A_1 y + C \left( yx^2 - \frac{y^3}{3} \right), \quad \beta_2 = A_1 b_2$$

$$F(x, y) = b_2 y \left( (C - 1)x^2 - \frac{C}{3} y^2 \right),$$

гдѣ

$$C = \frac{2+x}{2} + \frac{1+x}{n}$$

есть коэффициентъ, величина котораго зависитъ отъ  $x$ , т. е., отъ природы вещества призмы, и отъ  $n$ . Можно подыскать, конечно, такіе замнутые контуры, для которыхъ, напримѣръ,  $C = 1$ , тогда топографическія линіи для этихъ контуровъ будутъ выражаться слѣдующими уравненіями:

$$+n = A_1 b_2 y - b_2 \frac{y^3}{3},$$

т. е. это будутъ прямыя, параллельныя оси  $X$ -овъ. Для этого необходимо, чтобы  $(1+n)$  было равно  $-\left(\frac{2}{x} + 1\right)$ ; т. е. было бы дробнымъ; въ такихъ случаяхъ можетъ получиться замкнутый контуръ, составленный изъ кривой:

$$\frac{A_1 n}{(1+n)(1+x)} - \frac{y^2}{n+3} - x^2 = D_1 y^{-(n+1)}$$

на той части плоскости  $XU$ , которая соответствуетъ положительнымъ  $y$ , и изъ кривой:

$$\frac{A_1 n}{(1+n)(1+x)} - \frac{y^2}{n+3} - x^2 = -D_1 y^{-(n+1)}$$

на сторонѣ отрицательныхъ  $y$ . Относительно всѣхъ подобныхъ обстоятельствъ и вида могущихъ здѣсь представиться контуровъ мы рекомендуемъ обратиться къ статьѣ (С. Венана\*), въ которой, впрочемъ  $x$  полагается равнымъ 0,25.

3. Изгибъ призмы, основанія которой имѣютъ какой угодно симметричный относительно плоскостей  $YZ$  и  $ZX$  видъ, можетъ быть опредѣленъ весьма просто въ тѣхъ случаяхъ, когда напряжения, приложенныя къ основаніямъ ея, таковы, что главный векторъ  $B$  равенъ нулю (и конечно также и проеціи его  $B_x, B_y, B_z$  на оси координатъ), а изъ моментовъ же напряженій, приложенныхъ къ свободному основанію, равенъ нулю  $M_z$ . Въ такихъ случаяхъ нѣтъ надобности опредѣлять вида функцій  $\zeta, \varphi_1$  и  $\varphi_2$ , потому что коэффициенты  $\alpha, b_1$  и  $b$  равны нулю, коэффициенты  $\beta_1$  и  $\beta_2$  тоже равны нулю, а остаются только  $a_1$  и  $a_2$ , выражающіеся по формуламъ (261) стр. 148 въ величинахъ двухъ остальныхъ, неравныхъ нулю, моментовъ.

\*) de Saint-Venant. Memoire sur la flexion des prismes, sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opere pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectee alors par leurs sections transversales primitivement planes. Journal de mathématiques p. Liouville, 2-me Série, T. I, 1856.

Возьмемъ тотъ случай, когда неравенъ нулю только моментъ вокругъ оси  $X$ -овъ. Тогда  $a_1 = 0$  и  $a_2 E\mathfrak{F}_c = I_x$ ; перемѣненія точекъ призмы выразятся формулами:

$$u = -\alpha a_2 xy, v = -a_2 \frac{z^2}{2} - \alpha a_2 \frac{y^2 - x^2}{2}, w = a_2 yz,$$

а координаты  $x, y, z$  — формулами:

$$x = x(1 - \alpha a_2 y), y = y - \frac{a_2}{2} ((y^2 - x^2) \alpha + z^2), z = z(1 + a_2 y) \quad (288)$$

При постоянныхъ  $x$  и  $y$ , эти равенства выражаютъ форму искривленнаго волокна: каждое волокно будетъ заключаться въ вертикальной плоскости, но, вообще говоря не въ той, въ которой оно было въ предварительномъ состоян.п: въ своихъ начальныхъ вертикальныхъ плоскостяхъ останутся только волокна, входившія въ плоскостяхъ симметріи призмы. Кривая, представляемая которымъ либо изогнутымъ волокномъ выразится уравненіемъ:

$$x = y - \frac{a_2}{2} ((y^2 - x^2) \alpha + z^2), \dots \dots \dots (289)$$

Предположимъ, что моментъ  $I_x$  отрицательный, тогда  $a$ , имѣетъ тоже отрицательную величину (пусть  $a_2 = -a'_2$ ) и свободное основаніе призмы наклоняется по положительной оси  $Y$ -овъ. По формуламъ (288) найдемъ, что для центрального волокна  $x = 0, z = z$  и что уравненіе его будетъ слѣдующее:

$$z^2 = \frac{2}{a'_2} y \dots \dots \dots (290)$$

Это парабола, полупараметръ которой равенъ  $(1 : a')$ , вершина находится въ началѣ координатъ, а ось направлена по положительной оси  $Y$ ; приближенно можно считать эту кривую дугою круга радіуса  $R$  равнаго  $(1 : a')$  (Стрѣлка изгиба центрального волокна равна

$$k = a'_2 \frac{R^2}{2}.$$

Уравненія (289) всѣхъ прочихъ волоконъ можно представить такъ:

$$z = \frac{2}{a'_2} (1 - a'_2 y)^2 (y - y_0), \dots \dots \dots (289)$$

гдѣ  $y_0$  есть новал ордината начало волокна: это тоже параболы, полупараметры которыхъ менѣе полупараметра центрального волокна при положительномъ  $y$  и болѣе при отрицательномъ  $y$ .

Положивъ въ равенствахъ (288)  $z = c$  получимъ выраженія координатъ точекъ поперечнаго сѣченія  $z = c$  при деформированномъ состояніи призмы. Если поступить такимъ же образомъ, какъ въ пунктѣ 1-мъ настоящаго параграфа, т. е. взять за новое начало координатъ точку  $z_1 = c$  и  $2y_1 = a'_2 c^2$ , а за новую ось  $Z$  касательную въ этой точкѣ къ центральному волокну и назвать черезъ  $z$  и  $y$  новыя координаты точекъ

поверхности образуемой сѣченіемъ (примемъ  $r = r_1$ ), то получимъ слѣдующія выраженія для этихъ координатъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + a_2' x y, \quad y = \frac{(a_2')^2 c x (y^2 - x^2)}{2 \sqrt{1 + (a_2' c)^2}} \\ y &= y \sqrt{1 + (a_2' c)^2} + \frac{a_2' (y^2 - x^2) x}{2 \sqrt{1 + (a_2' c)^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (291)$$

Пренебрегая квадратами и высшими степенями  $a_2'$  получимъ  $\lambda = 0$ , т. е., при ничтожномъ изгибѣ призмы, при которомъ можно пренебрегать квадратами и высшими степенями  $a_2'$ , ось поперечнаго сѣченія ея будетъ казаться плоскими и нормальными къ центральному волокну, которое будетъ имѣть видъ дуги круга.

Предположимъ, что сѣченіе призмы было прямоугольникомъ, ограниченный сторонами:  $x = \pm A$ ,  $y = \pm B$ ; посмотримъ, какой видъ получали эти стороны при деформации.

Пренебрегая квадратами и высшими степенями  $a_2'$ , мы найдемъ, изъ формулъ (291), что ординаты  $y_1$ ,  $y_2$  серединъ верхней и нижней сторонъ окажутся равными:

$$y_1 = -B + a_2' x \frac{B^2}{2}, \quad y_2 = B + a_2' x \frac{B^2}{2}$$

и что уравненія самихъ сторонъ будутъ, верхней и нижней:

$$x^2 = \frac{A^2}{a_2'^2} (1 - 2a_2' x B) (y_1 - y), \quad x^2 = \frac{A^2}{a_2'^2} (1 + 2a_2' x B) (y_2 - y).$$

Это параболы, оси которыхъ направлены вверхъ, а вершины находятся въ точкахъ  $C_1$ ,  $C_2$  (черт. 35-й), бывшихъ серединами сторонъ. Если разсматривать эти кривыя какъ дуги круговъ, то окажется, что центръ верхней дуги находится въ разстояніи  $\frac{1}{a_2' x} - 2B$  отъ точки  $C_1$ , а нижней въ разстояніи  $\frac{1}{a_2' x}$  отъ нея же, такъ что нижняя дуга не концентрична съ верхней, но центръ ея еще выше чѣмъ верхней.

Координаты вершинъ  $A_3$  и  $B_4$  будутъ, первый и второй:

$$\begin{aligned} x_3 &= A (1 - a_2' x B), & x_4 &= A (1 + a_2' x B) \\ y_3 &= -B + a_2' x \frac{B^2 - A^2}{2}, & y_4 &= B + a_2' x \frac{B^2 - A^2}{2}; \end{aligned}$$

если прямоугольникъ былъ квадратомъ, то ординаты этихъ точекъ будутъ  $(-B)$  и  $(+B)$ .

Обѣ боковыя стороны выражаются однимъ уравненіемъ:

$$x^2 = 2A^2 a_2' x \left( y + \frac{1}{2a_2' x} \right);$$

Эта — парабола, имѣющая вершину на отрицательной оси  $Y$ -овъ и весьма малый полупараметръ  $A^2 a_2' x$ .

При разсматриваемомъ здѣсь изгибѣ сдвиги  $2g_1$  и  $2g_2$ , какъ видно изъ формулъ (252) и (253) стр. 145, равны нулю, а потому равны также нулю и напряжения  $T$  и  $T_z$  во всей призмѣ. Неравны нулю только продольныя напряжения  $N_z = E\alpha_z y$ , которыя имѣютъ отрицательныя величины въ нижнихъ волокнахъ и положительныя — въ верхнихъ. Для произведенія такого изгиба надо приложить къ свободному основанію: къ элементамъ, находящимся на положительной оси  $Y$ -овъ, — давленія, а къ элементамъ, находящимся на отрицательной оси  $Y$ -овъ — натяженія. Несвободное основаніе можно закрѣпить все въ его деформированномъ состояніи; тогда закрѣпляющія его связи будутъ оказывать соотвѣтственные реакціи въ каждомъ изъ элементовъ его плоскости.

## IX.

### О равновѣсіи тонкихъ упругихъ проволокъ.

§ 47. Въ § 34-мъ на стр. 91-й было упомянуто, что мы ограничиваемся разсматриваніемъ только такихъ деформаций упругихъ тѣлъ, при которыхъ вокругъ каждой точки тѣла, въ сферѣ дѣйствія исходящихъ изъ нея частичныхъ силъ, совершаются относительно деформаций однородныя и ничтожно-малыя.

Принимая теорію упругости къ тѣламъ, одно или два измѣренія которыхъ ничтожно-малы, то есть къ весьма тонкимъ пластинкамъ или проволокамъ, мы можемъ разсматривать конечныя, не ничтожно-малыя, деформации ихъ длинныхъ размѣровъ, лишь бы только внутреннія деформации въ каждомъ изъ ничтожно-малыхъ элементовъ тѣла были ничтожно-малы сравнительно съ его наименьшими размѣрами.

Если разсматриваемое тѣло есть весьма тонкая пластинка, то мы можемъ разсматривать такія упругія деформации ея, при которыхъ видъ ея поверхности измѣняется замѣтнымъ образомъ, лишь бы поверхность не получила гдѣ либо излома или весьма крутого изгиба.

Если разсматриваемое тѣло есть весьма тонкая проволока, то можемъ разсматривать такія упругія деформации ея, при которыхъ видъ ея оси измѣняется какъ угодно, лишь бы кривизна и завитіе этой линии нигдѣ не сдѣлались безконечно большими и закручиваніе каждаго элемента длины проволоки было бы ничтожно-мало.

Въ этой главѣ мы будемъ разсматривать условія равновѣсія упругихъ тонкихъ проволокъ подъ вліяніемъ данныхъ вѣшнихъ силъ.

Подъ именемъ проволоки подразумѣвается такое сплошное тѣло, наружная поверхность котораго можетъ быть представлена слѣдующимъ образомъ:

Вообразимъ себѣ отрѣзокъ кривой линіи какого бы то ни было вида; пусть  $A$  и  $B$  суть концы этого отрѣзка. Положеніе точки  $P$ , находящейся на этой кривой, будемъ выражать разстояніемъ  $s$ , считаемымъ отъ точки  $A$  вдоль по кривой линіи до точки  $P$ ; разстоянія, считаемыя отъ  $A$  къ  $B$ , будемъ выражать положительными величинами.

Возьмемъ какую либо плоскую площадку неизмѣняемаго вида и положимъ что эта площадка движется такъ, что центръ тяжести  $C$  ея всегда остается на вышесказанной кривой, нѣкоторая линія  $CN$  площадки совпадаетъ съ главною нормалью кривой.



й, а плоскость площадки совпадает съ нормальною плоскостью кривой. Поверхность, образуемая слѣдомъ периметра этой площадки при движеніи точки  $C$  вдоль той же кривой, представляетъ *боковую поверхность правильной проволоки*, поперечное сѣченіе которой одинаково по всей ея длинѣ; на концахъ проволоки сгруппированы плоскостями нормальными къ кривой: направляющую кривую, образуемую центрами тяжести тѣхъ сѣченій проволоки, мы будемъ называть *осью ея*.

При томъ же видѣ оси проволоки и при томъ же видѣ образующей площадки, мы можемъ получить безчисленное множество другихъ формъ боковыхъ поверхностей: можно только перемѣщать образующую площадку такимъ образомъ, чтобы линія  $CN$  не совпадала съ главными нормальными кривой, а составляла бы съ ними уголъ, измѣняющійся по тому или другому закону. Такія проволоки мы условимся называть *неправильными проволоками съ поперечнымъ сѣченіемъ одинаковаго вида и размера по всей длинѣ проволоки*.

Наконецъ, если видъ и размѣры образующей площадки измѣняются по какому либо закону сплошнымъ образомъ, то образуется боковая *поверхность проволоки съ поперечнымъ сѣченіемъ неопынаковаго вида по длинѣ ея*.

Мы здѣсь будемъ предполагать, что наибольшій линейный размѣръ поперечнаго сѣченія проволоки есть ничтожно-малая величина, которую мы здѣсь обозначимъ чертой  $i$ ; это  $i$  мы будемъ разсматривать, какъ безконечно-малую величину первого порядка.

Данъ видъ и положеніе проволоки въ предварительномъ состояніи: требуется предѣлать, какой видъ приметъ ось ея, если къ проволоку будутъ приложены данныя объемныя силы, а къ концамъ ея — данныя вѣсныя напряженія, причемъ одинъ изъ концовъ можетъ быть закрѣпленъ, какъ указано въ предыдущей главѣ.

**§ 48. Проволока, ось которой въ предварительномъ состояніи была прямолинейною. Величины, опредѣляющія положенія элементовъ проволоки въ деформированномъ состояніи.**

Мы разсмотрѣли сначала вопросы о деформациіи другой проволоки, ось которой въ предварительномъ состояніи была прямою линіею, которую мы возьмемъ за ось  $Z$  ось; начало координатъ помѣстимъ на одно изъ концовъ проволоки.

Чтобы опредѣлить видъ, принимаемый проволокою при дѣйствіи данныхъ силъ и напряженій, надо прежде всего мысленно раздробить проволоку на элементы по оси ея и составить уравненія равновѣсія, для каждаго изъ этихъ элементовъ, тѣхъ силъ, которыя къ нему приложены, а именно: объемныхъ силъ и напряженій, дѣйствующихъ въвозъ его оконечности со стороны сосѣднихъ элементовъ. Размѣры элементовъ по длинѣ проволоки мы предположимъ сравнимыми съ  $i$ , т. е. порядка малости этой величины.

При составленіи уравненій равновѣсія силъ, приложенныхъ къ элементамъ, надо имѣть въ виду, что главный векторъ объемныхъ силъ, приложенныхъ ко всему элементу, имѣетъ измѣренія того же порядка малости, какъ и самый объемъ его, т. е. порядка  $i^3$ , напряженія же, приложенныя къ концамъ элемента, имѣютъ измѣренія этихъ площадей сѣченій, т. е. измѣренія порядка  $i$ . При этомъ предполагается, что величины объемныхъ силъ, разсчитанныя на единицу массы, и величины напряженій, разсчитанныя на единицу площади, конечны, а не безконечно-велики. Вообще, при составленіи уравненій равновѣсія или движенія элементовъ, необходимо принять въ разсчетъ измѣренія всѣхъ входящихъ въ уравненія величинъ.



Каждый элемент проволоки рассматривается как призма въ Санъ Венаовой задачѣ, такъ что деформированное состояніе всѣхъ точекъ его выражается тѣми формулами, которыя выведены при рѣшеніи этой задачи; но для этого необходимо отнести каждый элементъ, въ его деформированномъ состояніи, къ особымъ для него координатнымъ осямъ, одна изъ которыхъ совпадаетъ съ касательною къ оси элемента.

Пусть  $x, y, z$  суть координаты, относительно неподвижныхъ осей, той точки  $P$  оси, которая находится на концѣ элемента ближайшемъ къ началу проволоки. Въ предварительномъ состояніи эта точка находилась отъ  $O$  въ разстояніи  $c$  по оси  $Z$ -овъ, а теперь находится въ разстояніи  $s$  отъ начала проволоки, считая разстоянія по искривленной оси ея. Координаты  $x, y, z$  суть функціи отъ  $c$ , но  $(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ , равное  $(ds)^2$ , не равно  $(dc)^2$  (гдѣ  $dc$  есть длина элемента въ предварительномъ состояніи), потому что элементы въ деформированномъ состояніи измѣнили свои длины противу первоначальныхъ; положимъ, что линейное удлинненіе единицы длины оси элемента есть  $\epsilon$ , т. е.

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dc)^2 (1 + \epsilon^2);$$

удлинненіе  $\epsilon$  должно рассматривать тоже какъ функцію отъ  $c$ .

Касательная въ точкѣ  $P$  къ оси проволоки образуетъ съ осями координатъ  $X, Y, Z$  углы, косинусы которыхъ суть:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dc} (1 - \epsilon), \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dc} (1 - \epsilon), \quad \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dc} (1 - \epsilon), \dots \dots \dots (292)$$

пренебрегая квадратами и высшими степенями ничтожно-малыхъ удлинненій  $\epsilon$ .

При предварительномъ состояніи проволоки проведемъ черезъ точку  $P$  двѣ линіи  $PX'$  и  $PY'$  параллельныя осямъ координатъ и означимъ черезъ  $x, y, z$  координаты какой либо точки элемента относительно этихъ осей и оси  $PZ$ , совпадающей съ осью  $Z$ -овъ. При деформации проволоки точка  $P$  получитъ положеніе, выражаемое координатами  $x, y, z$ , прежняя прямолинейная ось элемента будетъ обращена въ элементъ кривой линіи  $s$ , а прежнія линіи  $PX'$  и  $PY'$  вообще не будутъ перпендикулярны къ касательной, проведенной изъ точки  $P$  къ искривленной оси элемента. Возьмемъ эту касательную за ось  $Z$ , а за ось  $\Xi$  возьмемъ направленіе перпендикулярное къ  $Z$  и проведенное черезъ точку  $P$  въ той плоскости, которая проходитъ черезъ ось  $Z$  и черезъ линію  $PX'$ . Означимъ черезъ  $\xi, \eta, \zeta$  координаты точекъ деформированнаго элемента по отношенію къ этимъ осямъ; разности  $\xi - x, \eta - y, \zeta - z$  будемъ обозначать черезъ  $u, v, w$ .

Косинусы угловъ  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \mu_x, \mu_y, \mu_z, \nu_x, \nu_y, \nu_z$  составляемыхъ осями  $\Xi, Y, Z$  въ разныхъ точкахъ деформированной оси проволоки съ осями  $X, Y, Z$  выразятся въ трехъ углахъ  $\phi, \theta$  и  $\epsilon$  также какъ и въ кинематикѣ твердаго тѣла.

Такъ какъ эти углы  $\phi, \theta$  и  $\epsilon$  измѣняются вдоль по оси проволоки, то ихъ должно рассматривать, какъ функціи отъ  $c$ ; поэтому и косинусы:

$$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \mu_x, \mu_y, \mu_z, \nu_x, \nu_y, \nu_z$$

будутъ функціями отъ  $c$ .

Абсолютныя координаты  $x, y, z$  какой либо точки элемента при деформированномъ состояніи проволоки выразятся, по извѣстнымъ формуламъ преобразованія координатъ, такъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= x + (r + u) \lambda_x + (v + v) \mu_x + (z + w) \nu_x, \\ y &= y + (r + u) \lambda_y + (v + v) \mu_y + (z + w) \nu_y, \\ z &= z + (r + u) \lambda_z + (v + v) \mu_z + (z + w) \nu_z. \end{aligned} \right\} \dots \dots (293)$$

Здѣсь  $u, v, w$  въ каждомъ элементѣ проволоки суть функціи отъ  $r, v, z$ ; вмѣстѣ съ тѣмъ эти величины суть функціи и отъ  $c$ , такъ какъ онѣ измѣняются также при переходѣ отъ одного элемента въ другому. Такъ какъ проволока образуетъ сплошное тѣло, то должна существовать зависимость между производными отъ  $u, v, w$  по  $z$  и производными отъ нихъ по  $c$ .

Для того, чтобы найти эту зависимость, примемъ во вниманіе, что  $x, y, z$ , какъ координаты относительно осей  $X, Y, Z$  точекъ проволоки въ деформированномъ ея состояніи должны быть функціями начальныхъ координатъ  $r, v, (c + z)$ ; въ виду того, то онѣ должны быть функціями отъ суммы  $(c + z)$ . мы должны заключить, что производныя отъ  $x, y, z$  по  $c$  должны быть равны производнымъ по  $z$ ; вслѣдствіе этого получимъ слѣдующія равенства:

$$\begin{aligned} \lambda_x \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial c} \right) + \mu_x \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial c} \right) + \nu_x \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial c} \right) = \\ = \varepsilon \nu_x + \frac{\partial \lambda_x}{\partial c} (r + u) + \frac{\partial \mu_x}{\partial c} (v + v) + \frac{\partial \nu_x}{\partial c} (z + w), \dots \dots (294, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_y \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial c} \right) + \mu_y \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial c} \right) + \nu_y \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial c} \right) = \\ = \varepsilon \nu_y + \frac{\partial \lambda_y}{\partial c} (r + u) + \frac{\partial \mu_y}{\partial c} (v + v) + \frac{\partial \nu_y}{\partial c} (z + w), \dots \dots (294, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_z \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial c} \right) + \mu_z \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial c} \right) + \nu_z \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial c} \right) = \\ = \varepsilon \nu_z + \frac{\partial \lambda_z}{\partial c} (r + u) + \frac{\partial \mu_z}{\partial c} (v + v) + \frac{\partial \nu_z}{\partial c} (z + w) \dots \dots (294, 3) \end{aligned}$$

Здѣсь  $\varepsilon$  вошло потому, что производныя отъ  $x, y, z$  по  $c$  замѣнены (по формуламъ (292)) произведеніями  $\nu_x (1 + \varepsilon), \nu_y (1 + \varepsilon), \nu_z (1 + \varepsilon)$ .

Рѣшивъ равенства (294) относительно разностей производныхъ по  $z$  и по  $c$  и привнявъ во вниманіе извѣстныя соотношенія между косинусами  $\lambda_x, \lambda_y, \dots \dots \nu_z$ , получимъ слѣдующія выраженія для этихъ разностей:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial c} + (z + w) q - (v + v) r \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial v}{\partial c} + (r + u) r - (z + w) p \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial c} + (v + v) p - (r + u) q + \varepsilon \end{aligned} \right\} \dots \dots (295)$$

гдѣ  $p$ ,  $q$  и  $r$  суть слѣдующія выраженія:

$$p = v_x \frac{d\mu_x}{dc} + v_y \frac{d\mu_y}{dc} + v_z \frac{d\mu_z}{dc} \dots \dots \dots (296, 1)$$

$$q = \lambda_x \frac{dv_x}{dc} + \lambda_y \frac{dv_y}{dc} + \lambda_z \frac{dv_z}{dc} \dots \dots \dots (296, 2)$$

$$r = \mu_x \frac{d\lambda_x}{dc} + \mu_y \frac{d\lambda_y}{dc} + \mu_z \frac{d\lambda_z}{dc} \dots \dots \dots (296, 3)$$

#### § 49. Уравненія равновѣсія элементовъ проволоки.

Согласно съ тѣмъ, что было высказано въ первыхъ главахъ этой книги, приложенныя къ каждому элементу проволоки внѣшнія объемныя силы и напряженія, дѣйствующія на его оконечности со стороны сосѣднихъ элементовъ, должны взаимно-уравновѣшиваться.

Означимъ черезъ  $B_x, B_y, B_z, L_x, L_y, L_z$  проэкціи на оси  $X, Y, Z$  главного вектора и главного момента напряженій, дѣйствующихъ сквозъ все поперечное сѣченіе проволоки, проведенное въ точкѣ  $P(x, y, z, s)$  оси ея; притомъ это суть напряженія, дѣйствующія сквозъ это сѣченіе съ той стороны, гдѣ  $s$  больше чѣмъ въ  $P$ , на ту сторону, гдѣ  $s$  меньше чѣмъ въ  $P$ . Означимъ черезъ  $B_x, B_y, B_z, L_x, L_y, L_z$  проэкціи того же главного вектора и того же главного момента на оси  $\Xi, \Upsilon, Z$ . *Моменты напряженій берутся вокругъ точки  $P$ .*

Этотъ главный векторъ  $B$  и этотъ главный моментъ  $L$  должны быть сплошными функциями координатъ точки  $P$  или величины  $s$ , опредѣляющей мѣсто этой точки на оси проволоки, такъ что на другомъ концѣ элемента, въ точкѣ  $P_1(s + ds)$ , проэкція на ось  $X$ -овъ вектора напряженій, дѣйствующаго сквозъ проведенное здѣсь сѣченіе на внутреннія частицы элемента, будетъ равно:

$$B_x + \frac{dB_x}{ds} ds.$$

Проекція на ту же ось главного момента тѣхъ же напряженій вокругъ точки  $P_1$  будетъ:

$$L_x + \frac{dL_x}{ds} ds,$$

а проекція главного момента тѣхъ же напряженій вокругъ точки  $P$  будетъ равна:

$$L_x - \frac{dL_x}{ds} ds + (v_y B_z - v_z B_y) ds,$$

потому что разности между координатами точки  $P$  и точки  $P_1$  выразятся величинами  $v_x ds, -v_y ds, v_z ds$ , отбрасывая члены высшихъ порядковъ малости.

Проекція главного вектора объемныхъ силъ, приложенныхъ къ элементу, могутъ быть выражены такимъ образомъ:

$$\sigma B_x ds, \sigma B_y ds, \sigma B_z ds,$$

где  $\sigma$  есть плотность вещества проволоки въ точкѣ  $P$ , а  $\mathfrak{B}$  суть интегралы, распространенные на площади сѣченія въ точкѣ  $P$ :

$$\mathfrak{B}_x = \iint X d\omega, \quad \mathfrak{B}_y = \iint Y d\omega, \quad \mathfrak{B}_z = \iint Z d\omega.$$

Произведения  $\sigma \mathfrak{B}$  можно разсматривать какъ объемныя силы, разсчитанныя на единицу длины проволоки.

Подобнымъ же образомъ и проэкціи на оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  момента вкругъ точки  $P$  объемныхъ силъ, приложенныхъ къ элементу  $ds$ , будемъ обозначать черезъ:

$$\sigma \mathfrak{L}_x ds, \quad \sigma \mathfrak{L}_y ds, \quad \sigma \mathfrak{L}_z ds.$$

Выразимъ, что сумма проэкцій на ось  $X$ -овъ напряженій, приложенныхъ къ концамъ элемента, и объемныхъ силъ къ нему приложенныхъ, равна нулю; получимъ:

$$-B_x + B_x + \frac{dB_x}{ds} ds + \sigma \mathfrak{B}_x ds = 0.$$

Такимъ образомъ составимъ шесть дифференціальныхъ уравненій для каждой точки оси проволоки:

$$\frac{dB_x}{ds} + \sigma \mathfrak{B}_x = 0, \quad \frac{dB_y}{ds} + \sigma \mathfrak{B}_y = 0, \quad \frac{dB_z}{ds} + \sigma \mathfrak{B}_z = 0 \dots \dots (297)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_x}{ds} + \nu_y B_z - \nu_z B_y + \sigma \mathfrak{L}_x &= 0, \\ \frac{dM_y}{ds} + \nu_z B_x - \nu_x B_z + \sigma \mathfrak{L}_y &= 0, \\ \frac{dM_z}{ds} + \nu_x B_y - \nu_y B_x + \sigma \mathfrak{L}_z &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots (298)$$

или:

$$B_x = B_\xi \lambda_r + B_\eta \mu_x + B_\zeta \nu_x, \quad M_x = M_\xi \lambda_r + M_\eta \mu_x + M_\zeta \nu_x \dots \dots$$

На основаніи извѣстныхъ зависимостей между девятью косинусами, а также и между ихъ производными, можно рѣшить эти уравненія относительно производныхъ по отношению къ  $B_\xi$ ,  $B_\eta$ ,  $B_\zeta$ ,  $M_\xi$ ,  $M_\eta$ ,  $M_\zeta$  и тогда получимъ слѣдующія дифференціальныя уравненія:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB_\xi}{ds} + B_\eta q_1 - B_\eta p_1 + \sigma (\mathfrak{B}_x \lambda_r + \mathfrak{B}_y \mu_y + \mathfrak{B}_z \nu_z) &= 0, \\ \frac{dB_\eta}{ds} + B_\xi p_1 - B_\xi q_1 + \sigma (\mathfrak{B}_x \mu_r + \mathfrak{B}_y \mu_y + \mathfrak{B}_z \mu_z) &= 0, \\ \frac{dB_\zeta}{ds} + B_\eta p_1 - B_\xi q_1 + \sigma (\mathfrak{B}_x \nu_r + \mathfrak{B}_y \nu_y + \mathfrak{B}_z \nu_z) &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots (299)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dJ_{\xi}}{ds} + J_{\xi}q_1 - J_{\eta}r_1 - B_{\eta} + \sigma (\varrho_x \lambda_x + \varrho_y \lambda_y + \varrho_z \lambda_z) &= 0, \\ \frac{dJ_{\eta}}{ds} + J_{\xi}r_1 - J_{\zeta}p_1 + B_{\xi} + \sigma (\varrho_x \mu_x + \varrho_y \mu_y + \varrho_z \mu_z) &= 0, \\ \frac{dJ_{\zeta}}{ds} + J_{\eta}p_1 - J_{\xi}q_1 + \sigma (\varrho_x \nu_x + \varrho_y \nu_y + \varrho_z \nu_z) &= 0, \end{aligned} \right\} \dots (300)$$

здѣсь:

$$p_1 = p(1 - \epsilon), \quad q_1 = q(1 - \epsilon), \quad r_1 = r(1 - \epsilon).$$

Въ томъ или другомъ видѣ, эти шесть дифференціальныхъ уравненій заключаютъ 9 неизвѣстныхъ функций отъ  $s$ , когда видъ искривленной проволоки неизвѣстенъ. Въ самомъ дѣлѣ, кромѣ трехъ изъ девяти косинусовъ  $\lambda_x, \lambda_y, \dots, \nu_z$ , здѣсь входятъ еще шесть функций  $B_{\xi}, B_{\eta}, B_{\zeta}, J_{\xi}, J_{\eta}, J_{\zeta}$ . Однако, если разсмотрѣть значенія величинъ  $p, q, r$  и предположить, что каждый элементъ деформируется по тому же закону, какъ призма въ задачѣ С. Венава, то окажется, что моменты  $J_{\xi}, J_{\eta}, J_{\zeta}$  могутъ быть выражены въ  $p, q$  и  $r$ .

### § 50. Зависимость между величинами $p, q, r$ и моментами $J$ .

Представимъ себѣ, что вдоль по искривленной оси проволоки перемѣщается точка  $Ю$ , которая служитъ началомъ трехъ координатныхъ осей:  $Z$ , направляющей по касательной къ оси проволоки, въ сторону возрастающихъ  $s$ , оси  $\Xi'$ , направляющей по главной нормали кривой къ центру кривизны и  $\Upsilon'$ , направляющей по бинормали. Означимъ черезъ  $\nu_x, \nu_y, \nu_z, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, M_x, M_y, M_z$  косинусы угловъ, составляемыхъ этими осями съ осями координатъ.

Такъ какъ первые шесть косинусовъ могутъ быть выражены слѣдующими произвольными:

$$\nu_x = \frac{dx}{ds}, \quad \nu_y = \frac{dy}{ds}, \quad \nu_z = \frac{dz}{ds}, \quad \lambda_x = \varrho \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \lambda_y = \varrho \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \lambda_z = \varrho \frac{d^2z}{ds^2},$$

гдѣ  $\varrho$  есть радиусъ кривизны кривой въ точкѣ  $Ю$ , то три послѣдніе косинуса выражаются такъ:

$$M_x = \varrho \left( \frac{dy}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} \right), \quad M_y = \varrho \left( \frac{dz}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} \right), \quad M_z = \varrho \left( \frac{dx}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \right).$$

Величина  $(1:l)$ , равная слѣдующему корню:

$$\frac{1}{l} = \sqrt{\left( \frac{dM_x}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dM_y}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dM_z}{ds} \right)^2},$$

выражаетъ *загибѣ* кривой линіи въ той точкѣ, въ которой находится точка  $Ю$ ).

\*) См Кинематич. часть составленнаго мною курса аналитической механики. стр. 259, 260.



Составивъ выраженія:

$$p' = v_x \frac{dM_x}{ds} + v_y \frac{dM_y}{ds} + v_z \frac{dM_z}{ds} = - \left( M_x \frac{dv_x}{ds} + M_y \frac{dv_y}{ds} + M_z \frac{dv_z}{ds} \right)$$

$$q' = \Lambda_x \frac{dv_x}{ds} + \Lambda_y \frac{dv_y}{ds} + \Lambda_z \frac{dv_z}{ds},$$

найдемъ, что  $p' = 0$  и что  $q' = (1 : \rho)$ .

Величины производныхъ по  $s$  отъ косинусовъ  $M_x, M_y, M_z$ , помноженные на  $l$ , выражаютъ косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ вращательною скоростью точки, находящейся на бинормали въ разстоянн равномъ единицѣ отъ точки  $H$ ). Очевидно, что эта вращательная скорость перпендикулярна къ оси  $\Upsilon'$ , но кромѣ того, она перпендикулярна также и къ оси  $Z$ , какъ видно изъ того, что  $p' = 0$ . (Если одно изъ двухъ выраженій для  $p'$  помножить на  $l$ , то получимъ выраженіе косинуса угла, составляемаго направлениемъ вращательной скорости вышесказанной точки съ осью  $Z$ ). Слѣдовательно эта вращательная скорость либо параллельная оси  $\Xi'$ , либо противоположна ей; а потому:

$$l \frac{dM_x}{ds} = \mp \rho \frac{d^2x}{ds^2}, \quad l \frac{dM_y}{ds} = \mp \rho \frac{d^2y}{ds^2}, \quad l \frac{dM_z}{ds} = + \rho \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Составивъ теперь выраженіе:

$$r' = - \left( \Lambda_x \frac{dM_x}{ds} + \Lambda_y \frac{dM_y}{ds} + \Lambda_z \frac{dM_z}{ds} \right),$$

найдемъ, что  $r' = \pm (1 : l)$ .

Такъ какъ  $p', q'$  и  $r'$  суть проэкіи угловой скорости воображаемаго твердаго тѣла, неизмѣнно связаннаго съ осями  $\Xi', \Upsilon'$  и  $Z$ , на эти оси, то изъ предыдущаго получается слѣдующая теорема кинематики.

*Если твердое тѣло движется такимъ образомъ, что какая либо точка его описываетъ съ постоянною скоростью какую либо непрерывную кривую и нѣкоторая ось тѣла ( $Z$ ), проведенная черезъ эту точку, направлена по касательной къ этой кривой, а другая ось ( $\Xi'$ ) направлена по главной нормали кривой, то угловая скорость тѣла всегда заключается въ плоскости осей  $\Upsilon'$  и  $Z$  и притомъ проэкія угловой скорости на бинормаль равна кривизнѣ  $(1 : \rho)$ , а проэкія ея на касательную равна завитію  $(1 : l)$ .*

Предположимъ себѣ теперь, что черезъ ту же точку  $H$  проведены двѣ другія взаимно-перпендикулярныя и ортогональныя къ  $Z$  оси  $\Xi$  и  $\Upsilon$ , которыя, при движеніи точки  $H$ , вращаются въ плоскости  $\Xi'\Upsilon'$  по совершенно произвольному закону; пусть  $\phi$  есть уголъ составляемый между собою осями  $\Xi$  и  $\Xi'$  и  $\left( \frac{\pi}{2} - \phi \right)$  — уголъ, составляемый между собою осями  $\Xi$  и  $\Upsilon'$ . Пусть  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \mu_x, \mu_y, \mu_z$  означаютъ косинусы угловъ, составляемыхъ этими осями  $\Xi, \Upsilon$  съ неподвижными осями  $X, Y, Z$ . Между этими косинусами и тѣми, которые обозначены большими буквами, существуетъ нѣкоторая простая зависимость.

Означивъ черезъ  $\psi$ , сферическій уголъ  $X\Xi\Xi'$  (чертежъ 36), составимъ для сферическихъ треугольниковъ  $\Gamma'\Xi X$  и  $\Xi\Xi'X$  слѣдующія два равенства:

$$M_x = \lambda_x \sin \varphi - \cos \varphi \sqrt{1 - \lambda_x^2} \cos \psi_1;$$

$$\Lambda_x = \lambda_x \cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{1 - \lambda_x^2} \cos \psi_1,$$

изъ которыхъ получимъ:

$$\lambda_x = M_x \sin \varphi + \Lambda_x \cos \varphi.$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\mu_x = M_x \cos \varphi - \Lambda_x \sin \varphi.$$

Подобнаго же вида соотношенія между косинусами угловъ, составляемыхъ этими осями съ другими двумя неподвижными осями  $Y$  и  $Z$ , т. е.:  $\lambda_y = M_y \sin \varphi + \Lambda_y \cos \varphi$ , и проч.

Вслѣдствіе этого окажется, что  $p_1$ ,  $q_1$  и  $r_1$  выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$p_1 = - \left( \mu_x \frac{dx}{ds} + \mu_y \frac{dy}{ds} + \mu_z \frac{dz}{ds} \right) = q' \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{\rho},$$

$$q_1 = \left( \lambda_x \frac{dx}{ds} + \lambda_y \frac{dy}{ds} + \lambda_z \frac{dz}{ds} \right) = q' \cos \varphi = \frac{\cos \varphi}{\rho},$$

$$r_1 = \mu_x \frac{d\lambda_x}{ds} + \mu_y \frac{d\lambda_y}{ds} + \mu_z \frac{d\lambda_z}{ds} = r' + \frac{d\varphi}{ds} = \pm \frac{1}{\rho} + \frac{d\varphi}{ds}.$$

Слѣдовательно ( $-p_1$ ) и  $q_1$  суть кривизны проекцій оси проволоки на плоскости  $ZY$  и  $ZX$ , а  $r_1$  есть сумма завѣтѣ оси проволоки съ закручиваніемъ плоскости  $\Xi\Gamma'$  относительно плоскости кривизны кривой.

Вернемся теперь къ формуламъ (248) — (250) стр. 145, выражающимъ перемѣщенія точекъ призмы, закрѣпленной на одномъ концѣ и подверженной вѣннмъ на-пряженіямъ на другомъ. Причѣмъ эти формулы къ точкамъ элемента, разсматривая элементъ какъ призму, закрѣпленный конецъ которой есть поперечное сѣченіе проволоки черезъ точку  $P$ , а свободный — такое же сѣченіе черезъ точку  $P_1$  ( $s + ds$ ); заменимъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  въ формулахъ (248) — (250) черезъ  $r$ ,  $\varphi$  и  $\lambda$ . Составимъ выраженія для координатъ  $x + u$ ,  $y + v$ ,  $z + w$  точекъ оси элемента; они будутъ:

$$x + u = -a_1 \frac{\delta^2}{2} - b_1 \frac{\delta^3}{6}, \quad y + v = -a_2 \frac{\delta^2}{2} - b_2 \frac{\delta^3}{6}, \quad z + w = z(1 + a),$$

здѣсь положены  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равными нулю, такъ какъ ось элемента касательна къ оси  $Z$  въ точкѣ  $P$ .

Означимъ эти координаты черезъ  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Уравненія проекцій оси элемента на плоскости  $ZX$  и  $ZY$  будутъ:

$$\xi = - \frac{a_1}{(1 + a)^2} \frac{\delta^2}{2} - \frac{b_1}{(1 + a)^3} \frac{\delta^3}{6}, \quad \eta = - \frac{a_2}{(1 + a)^2} \frac{\delta^2}{2} - \frac{b_2}{(1 + a)^3} \frac{\delta^3}{6}.$$

Кривизны этих кривыхъ въ точкѣ  $P$  будутъ слѣдующія:

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = -\frac{a_1}{(1+a)^2}, \quad \frac{d^2\eta}{ds^2} = -\frac{a_2}{(1+a)^2}.$$

Линейное удлинненіе по оси равно  $\frac{\sigma\xi}{\sigma_0}$ , т. е.  $a$ ; это есть то самое, что мы обозначали через  $\epsilon$  и предполагали величиною ничтожною.

Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что:

$$p_1 = p(1 - \epsilon) = \frac{a_2}{(1+a)^2}, \quad q_1 = q(1 - \epsilon) = -\frac{a_1}{(1+a)^2}.$$

Для того, чтобы относительныя деформаціи въ каждомъ элементѣ проволоки были ничтожно-малы сравнительно съ размѣрами элемента (а размѣры имѣютъ измѣреніе ничтожно-малой длины  $i$ ), необходимо, чтобы  $u$ ,  $v$ ,  $w$  имѣли измѣренія  $i^2$  или квадратовъ координатъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; слѣдовательно тѣ коэффициенты въ выраженіяхъ  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , которые помножены на первыя степени этихъ координатъ, должны имѣть измѣренія ничтожно-малой величины  $i$ , тѣ же коэффициенты, которые помножены на вторыя степени или на произведенія координатъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , могутъ быть величинами конечными; наконецъ тѣ коэффициенты, которые помножены на третьи степени координатъ, могутъ быть весьма большими величинами порядка  $(1/i)$ .

Въ формулахъ (248) — (250) коэффициенты, помноженные на первыя степени координатъ, суть  $a$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$ ; на вторыя степени координатъ помножены:  $a_1$ ,  $a$  и  $a$  и на третьи степени:  $b_1$  и  $b_2$ .

Поэтому, для того чтобы элементы проволоки получили деформаціи ничтожныя сравнительно съ размѣрами самихъ элементовъ, необходимо, чтобы  $a$  или  $\epsilon$  было измѣренія не выше  $i$ , чтобы  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a$  были конечныя и чтобы  $b_1$  и  $b_2$  были измѣренія не ниже  $(1/i)$ .

Предположимъ, что плоскости  $ZX$ ,  $ZY$  заключаютъ въ себѣ главныя оси инерціи поперечнаго сѣченія проволоки, проведеннаго черезъ точку  $I$ ; тогда, по формуламъ (261) стр. 146, коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a$ ,  $b_1$  и  $b_2$  выразятся такъ:

$$a_1 = -\frac{I_{\eta\eta}}{I_{\xi\xi}}, \quad a_2 = \frac{I_{\xi\xi}}{I_{\eta\eta}}, \quad a = \frac{B_z}{E\delta}, \dots \dots \dots (301)$$

$$b_1 = \frac{B_{\xi\xi}}{E\mathfrak{M}_r}, \quad b_2 = \frac{B_{\eta\eta}}{E\mathfrak{M}_r}, \dots \dots \dots (302)$$

Коэффициентъ же крученія  $\alpha$ , по формулѣ (271), разнится отъ отношенія

$$\frac{I_z}{K(\mathfrak{M}_r + \mathfrak{M}_r)}$$

членами, видъ которыхъ зависитъ отъ формы сѣченія.

Такъ какъ площадь  $S$  поперечнаго сѣченія проволоки имѣетъ измѣренія  $i^2$ , а моменты инерціи ея имѣютъ измѣренія  $i^4$ , то для того, чтобы коэффициенты  $a$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ , имѣли вышесказанныя измѣренія, необходимо, чтобы моменты  $I_{\xi\xi}$ ,  $I_{\eta\eta}$ ,  $I_z$  были измѣренія  $i^4$ , а векторы  $B_{\xi\xi}$ ,  $B_{\eta\eta}$ ,  $B_z$  — измѣренія  $i^3$ . При такихъ только напряженіяхъ,

деформации элементов проволоки будут ничтожно-малы сравнительно съ размахомъ поперечныхъ сѣченій ея.

Пренебрегая ничтожно-малыми величинами сравнительно съ конечными величинами, мы заключимъ, что

$$p = p_1 = \frac{J_z}{E\mathfrak{A}_c}, \quad q = q_1 = \frac{J_r}{E\mathfrak{A}_c}, \quad \dots \dots \dots (302)$$

Что касается до  $r_1$  или  $r$ , то очевидно, что это есть величина крученія проволоки на единицу длины ея оси, т. е.:  $\alpha$  и поэтому:

$$r = r_1 = \frac{J_z}{K(\mathfrak{A}_c + \mathfrak{B}_c)} \dots \dots \dots (303)$$

### § 51. Различные случаи равновѣсія проволокъ, неподверженныхъ объемнымъ силамъ.

Примѣнимъ дифференціальныя уравненія § 49-го къ упругой проволоцѣ, бывшей въ предварительномъ состоянн прямою и неподверженной никакимъ объемнымъ силамъ вдоль по всему ея протяженію. Предполагается, что такая проволока находится въ деформированномъ состоянн только подъ вліяніемъ вѣшнихъ напряженій, приложенныхъ къ концамъ ея.

Изъ уравненій (297) § 49-го будетъ слѣдовать, что въ этихъ случаяхъ  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  должны быть постоянны по всей длинѣ ея. Такъ какъ положеніе осей  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  произвольно, то расположимъ ихъ такъ, чтобы постоянныя, которыми равны  $B_x$  и  $B_y$  были равны нулю; тогда:

$$\left. \begin{aligned} B_x \lambda_x + B_y \mu_x + B_z \nu_x &= 0 \\ B_x \lambda_y + B_y \mu_y + B_z \nu_y &= 0 \\ B_x \lambda_z + B_y \mu_z + B_z \nu_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (304)$$

Отсюда:

$$B_x = \lambda_z C, \quad B_y = \mu_z C, \quad B_z = \nu_z C$$

По формуламъ (302) и (303) замѣнимъ въ уравненіяхъ (300) § 49-го моменты  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  слѣдующими величинами:

$$J_x = E\mathfrak{B}_c p, \quad J_y = E\mathfrak{A}_c q, \quad J_z = E\mathfrak{C}_c r,$$

гдѣ

$$\mathfrak{C}_c = \frac{K}{E} (\mathfrak{A}_c + \mathfrak{B}_c) \dots \dots \dots (305)$$

причемъ значки с ввиду буквъ будутъ, для краткости, отброшены; вслѣдствіе этого уравненія (300) примутъ слѣдующій видъ:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B} \frac{dp}{ds} &= (\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) \, q r + C_1 \mu_z \\ \mathfrak{A} \frac{dq}{ds} &= (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}) \, r p - C_1 \lambda_z \\ \mathfrak{C} \frac{dr}{ds} &= (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) \, p q, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (306)$$

гдѣ  $C_1 = C : E$ .

Такъ какъ кривизна и крученіе проволоки должны быть конечны по всей длинѣ ея, то должны быть конечны  $p$ ,  $q$ ,  $r$  и ихъ производныя по  $s$ , а потому члены уравненій (306), заключающіе эти величины, будутъ измѣренія  $i^4$  (такъ какъ таковы измѣренія моментовъ инерціи  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{C}$ ). То же самое измѣреніе должна имѣть и  $C_1$ , т. е. величина напряженія; она должна быть порядка  $i^4$ , не ниже.

Уравненія (306) аналогичны Эйлеровымъ дифференціальнымъ уравненіямъ вращенія тяжелаго твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки, находящейся на одной изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи тѣла, предполагая, что тяжесть дѣйствуетъ параллельно отрицательной оси  $Z$ -овъ (если  $C_1$  положительное). Раземотримъ различные случаи, въ которыхъ уравненія (306) могутъ быть рѣшены и прослѣдимъ аналогію такихъ случаевъ съ соответствующими случаями вращенія тѣла.

1. Начнемъ съ тѣхъ случаевъ, въ которыхъ ось проволоки образуетъ плоскую кривую въ плоскости  $ZY$ , причеиъ ось  $Y$  заключается въ той же самой плоскости.

Тогда изъ девяти косинусовъ четыре:  $\lambda_y$ ,  $\lambda_z$ ,  $\mu_x$ ,  $\nu_x$  равны нулю, одинъ:  $\lambda_x$  равенъ единицѣ, а остальные выражаются въ углахъ  $\phi$ , составленномъ осью  $Z$  съ осью  $Z$ , а именно:  $\mu_y = \cos \phi$ ,  $\mu_z = - \sin \phi$ ,  $\nu_y = \sin \phi$ ,  $\nu_z = \cos \phi$ . Поэтому  $q$  и  $r$  равны нулю, а  $p = - \frac{d\phi}{ds}$ .

Изъ трехъ дифференціальныхъ уравненій (306) остается только первое, которое можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$\mathfrak{B} \frac{dp}{ds} = - C_1 \frac{dy}{ds}.$$

Интегрируя это уравненіе и предполагая, что начало координатъ взято въ той точкѣ, гдѣ  $p = 0$ , получимъ  $\mathfrak{B} p = - C_1 y$ . Означимъ черезъ  $\rho$  радиусъ кривизны кривой и принявъ во вниманіе, что (какъ слѣдуетъ изъ предыдущаго параграфа) въ настоящемъ случаѣ  $(-p) = 1 : \rho$ , получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе кривой линіи, образуемой осью проволоки въ изогнутомъ состояніи:

$$\rho = \frac{\mathfrak{B}}{C_1} \frac{1}{y}, \quad \dots\dots\dots (307)$$

выражающее, что радиусъ кривизны оси проволоки въ разныхъ точкахъ ея имѣетъ величину обратно пропорціональную величинамъ ординатъ точекъ; эта кривая есть ни что иное, какъ *гипербола* Якова Бернулли.

Уравненіе (307) можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$\frac{\frac{d^2 y}{ds^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{C_1}{\mathfrak{B}} y. \quad \dots\dots\dots (308)$$



Прежде чѣмъ интегрировать это уравненіе, мы представимъ еще въ иномъ видѣ составленное нами первое изъ дифференціальнымъ уравненій (306), а именно въ слѣдующемъ:

$$-\mathfrak{B} \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -C_1 \sin \varphi.$$

Интегрируя уравненіе въ этомъ видѣ, получимъ:

$$\mathfrak{B} \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = h - 2C_1 \cos \varphi. \dots \dots \dots (309)$$

Это уравненіе аналогично съ тѣмъ, которое выражаетъ законъ живой силы въ качаніи сложнаго маятника вокругъ неподвижной оси подѣ влияніемъ силы тяжести, причеиъ  $s$  замѣняетъ время. Интегрируя это уравненіе, получимъ такъ сказать неявное уравненіе упругой линіи въ видѣ зависимости между угломъ  $\varphi$  и длиною дуги  $s$ .

Руководствуясь аналогіею между формулами, относящимися къ качанію маятника и къ упругой линіи, мы можемъ прямо написать неявные уравненія различныхъ категорій упругой линіи.

Представимъ уравненіе (309) подѣ слѣдующимъ видомъ:

$$\left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = -\frac{2C_1}{\mathfrak{B}} \left( \cos \varphi - \frac{h}{2C_1} \right) \dots \dots \dots (309, bis)$$

и сравнимъ его съ соотвѣтственнымъ уравненіемъ движенія маятника:

$$\left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{R} \left( \cos \varphi - \frac{b}{R} \right) \dots \dots \dots (310)$$

Сходство между этими двумя уравненіями будетъ полное тогда, когда  $C_1$  будетъ отрицательною. Тогда ( $C_1: \mathfrak{B}$ ) будетъ на мѣстѣ ( $g: R$ ), отношеніе ( $h: 2C_1$ ) на мѣстѣ ( $b: R$ ) и  $s$  на мѣстѣ  $t$ .

При  $h^2$  меньшеиъ  $4C_1^2$  длина дуги  $s$  можетъ быть выражена въ  $\varphi$  по извѣстной въ теоріи маятника формулѣ:

$$s = \sqrt{n} \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} \dots \dots \dots (311)$$

гдѣ

$$k = \sin \frac{\varphi_0}{2}, \cos \varphi_0 = \frac{h}{2C_1}, k \sin \eta = \sin \frac{\varphi}{2}, n = -\frac{\mathfrak{B}}{C_1}.$$

При  $h = -2C_1$ , когда  $\varphi_0 = \pi$  и  $k = 1$ , длина  $s$ , считая отъ того мѣста, гдѣ  $\varphi = 0$ , выразится такъ:

$$s = \sqrt{n} \log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \dots \dots \dots (312)$$

При  $h$  большемъ ( $-2C_1$ ), длина дуги  $s$ , считая отъ того мѣста, гдѣ  $\varphi = 0$ , выразится такъ:

$$s = \sqrt{n} \sqrt{\frac{-2C_1}{h-2C_1}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{2\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \dots\dots\dots (313)$$

гдѣ  $\alpha^2 (h-2C_1) = -4C_1$ .

Чтобы получить уравненіе упругой линіи въ координатахъ  $z$  и  $y$ , возьмемъ уравненіе (309) и подставимъ въ него  $(-p)$  вмѣсто производной отъ  $\varphi$  по  $s$  и затѣмъ замѣнимъ  $p$  черезъ  $(y:n)$  (такъ какъ  $\mathfrak{P}p = -C_1 y$ ); тогда  $y$  выразится въ  $\cos \varphi$  слѣдующимъ образомъ:

$$y^2 = 2n \left( \cos \varphi - \frac{h}{2C_1} \right) \dots\dots\dots (A)$$

Замѣнивъ здѣсь  $\cos \varphi$  единицею, дѣлевую на корень изъ  $1 + (y')^2$ , рѣшивъ уравненіе относительно производной  $y'$  (отъ  $y$  по  $z$ ), отбросивъ переменноя и интегрируя, получимъ:

$$z + C = \int \sqrt{\frac{2n - a^2 - y^2}{(a^2 - y^2)(4n - (a^2 - y^2))}} dy,$$

гдѣ

$$a^2 = 2n \left( 1 - \frac{h}{2C_1} \right),$$

т. е.  $a$  есть ордината  $y$ , соответствующая углу  $\varphi$ , равному нулю.

Положимъ  $y = a \sin u$  и (при  $h < 4C_1$ ) возьмемъ за начало координатъ ту точку кривой, гдѣ  $y = 0$ , тогда  $z$  выразится такою разностью двухъ эллиптическихъ интеграловъ втораго и перваго вида:

$$z = \int_0^u \sqrt{4n - a^2 \cos^2 u} \, du - \sqrt{n} \int_0^u \frac{2\sqrt{n} \, du}{\sqrt{4n - a^2 \cos^2 u}} \dots\dots\dots (314)$$

На чертежахъ 37-мъ, 38-мъ, 39-мъ, 40-мъ и 41-мъ представлены пять видовъ упругихъ кривыхъ, соответствующихъ  $h$  меньшимъ  $4C_1$ .

Кривыя вида, изображеннаго на чертежѣ 37-мъ, получаются тогда, когда уголъ  $\varphi$  меньше прямого: на чертежѣ изображено нѣсколько периодовъ этой кривой, соответствующихъ нѣсколькимъ периодамъ угла  $\varphi$ . Въ точкѣ  $A$  изображено направленіе силы  $C_1$  и въ точкѣ  $O$  — направленіе реакціи неподвижной точки, въ которой закреплень этотъ конецъ проволоки.

Если уголъ  $\varphi_0$  настолько малъ, что можно пренебречь четвертыми и высшими степенями отношенія  $a:2\sqrt{n}$ , то  $z$  можно выразить такъ:

$$z = \sqrt{n} \left[ u \left( 1 - \frac{3a^2}{16n} \right) - \frac{3a^2}{32n} \sin 2u \right]$$

и отсюда:

$$u = \frac{z}{\sqrt{n}} \left( 1 + \frac{3a^2}{16n} \right) + \frac{3a^2}{32n} \sin 2u.$$

Такъ какъ  $y = a \sin u$ , то при помощи ряда Лагранжа, съ тою же степенью приближения, найдемъ:

$$y = a \sin \frac{z}{\sqrt{n}} \left( 1 + \frac{3a^2}{16n} \right) + \frac{3a^3}{32n} \sin \frac{2z}{\sqrt{n}} \cos \frac{z}{\sqrt{n}} + \dots \quad (315)$$

такое приближенное уравнение упругой линии при весьма малой величинѣ сѣвки прогиба.

Если можно пренебречь и вторыми степенями отношенія  $a : 2\sqrt{n}$ , то уравнение упругой линии приметъ видъ уравненія синусоиды:

$$y = a \sin \frac{z}{\sqrt{n}}.$$

Кривая вида, изображеннаго на чертежѣ 38-мъ, получается при углѣ  $\varphi_0$  равномъ прямому. Какъ въ предыдущемъ, такъ и въ настоящемъ случаѣ разстояніе отъ  $O$  до основанія  $B$  (черт. 38) наибольшей ординаты  $y = b$  выразится слѣдующею разностью:

$$z_B = \sqrt{n} (2E - K) \dots \dots \dots (316)$$

гдѣ:

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \, d\psi, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},$$

и гдѣ  $2k\sqrt{n} = a$ .

При  $k$  равномъ нулю  $2E = \pi$  и  $2K = \pi$ ; затѣмъ, съ возрастаніемъ  $k$ ,  $E$  уменьшается, а  $K$  увеличивается. Поэтому, съ увеличеніемъ  $a$  или  $h$ , длина  $z_B$  уменьшается и обращается въ нуль при такомъ  $k$ , при которомъ  $2E = K$ .

Кривая вида, изображеннаго на чертежѣ 39-мъ, получается при углахъ  $\varphi_0$  большихъ прямого, пока разстояніе  $z_B$  не обратится въ нуль: тогда кривая получитъ видъ, изображенный на чертежѣ 40-мъ. При дальнѣйшемъ увеличеніи угла  $\varphi_0$  получится кривая вида, изображеннаго на чертежѣ 41-мъ, причѣмъ  $z_B$  сдѣлается уже отрицательнымъ.

На чертежѣ 42-мъ представлена упругая линия, образуемая при  $h$  равномъ  $(\approx 2C_1)$  и соответствующаго тому случаю движенія маятника, когда оный асимптотически приближается къ своему положенію неустойчиваго равновѣсія.

Такъ какъ тогда  $a = 2\sqrt{n}$ , то если взять за начало координатъ абсциссу, соответствующую ординатѣ  $y = a$ , выражение для  $z$  получитъ слѣдующій видъ:

$$z = 2\sqrt{n} \int_y^a \sin u \, du = \sqrt{n} \int_{\frac{\pi}{2}}^u \frac{du}{\sin u},$$

$$z = -\sqrt{4n - y^2} + \sqrt{n} \log \frac{2\sqrt{n} + \sqrt{4n - y^2}}{y}.$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда  $h$  болѣе  $2C_1$ , ордината  $y$  не обращается въ нуль (какъ видно изъ равенства (41)), но достигаетъ наименьшей величины  $b$  каждый разъ, какъ  $\cos \varphi$  обращается въ  $(-1)$ . Видъ упругой линіи представленъ на чертежѣ 43-мъ.

Въ томъ случаѣ, когда  $C_1 = 0$ , проволока изгибается подъ вліяніемъ паръ силъ, приложенныхъ къ концамъ ея. Изъ уравненія  $\mathfrak{B} \frac{dn}{ds} = 0$  слѣдуетъ, что тогда  $p =$  постоянному; далѣе найдемъ:  $\varphi = Ds$  или  $s = R\varphi$ , если означить черезъ  $R$  отношеніе  $(1 : D)$ . Слѣдовательно въ этомъ случаѣ проволока получаетъ видъ дуги круга. Величины моментовъ паръ, приложенныхъ къ концамъ проволоки, должны быть равны  $(E\mathfrak{B} : R)$ .

2. Упомянемъ также и объ другихъ случаяхъ равновѣсія проволоки съ какимъ бы то ни было поперечнымъ сѣченіемъ, когда на концы ея дѣйствуютъ только пары силъ и когда ось изогнутой проволоки образуетъ не плоскую кривую.

Если поперечное сѣченіе проволоки есть кругъ или правильный многоугольникъ, такъ что  $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$ , то уравненія (306) при  $C_1$  равномъ нулю аналогичны уравненіямъ вращательнаго движенія по инерціи тѣла, имѣющаго эллипсоидомъ инерціи эллипсоидъ вращенія.

Изъ уравненій (306) тогда слѣдуетъ:

$$r = n, \quad p = D \cos (\mu s + \gamma), \quad q = D \sin (\mu s + \gamma),$$

если  $\mathfrak{C} > \mathfrak{M}$ ; здѣсь  $\mu \mathfrak{M} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{M}) n$ ,  $D$ ,  $\gamma$  и  $n$  суть постоянныя

Продолжая изслѣдованіе далѣе, легко убѣдиться, что ось проволоки образуетъ цилиндрическую спираль.

Если  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{C}$  неравны между собою, то вопросъ о равновѣсіи проволоки имѣетъ аналогію съ общимъ вопросомъ о вращеніи тѣла по инерціи. Рѣшеніе и этого вопроса можетъ быть доведено до конца и координаты точекъ оси проволоки выразятся въ эллиптическихъ функціяхъ и въ функціи  $z$  отъ  $s^*$ .

3. Если проволока съ поперечнымъ сѣченіемъ изъ видѣ круга или многоугольника будетъ изогнута дѣйствіемъ вѣншихъ напряженій, приложенныхъ къ концамъ ея, причѣмъ  $C_1$  не равно нулю и ось проволоки не заключается въ одной плоскости, то уравненія (306) получатъ слѣдующій видъ:

$$\mathfrak{M} \frac{dp}{ds} = (\mathfrak{M} - \mathfrak{C}) qr + C_1 \sin \varphi \sin \vartheta, \quad p = - \frac{d\kappa}{ds} \sin \varphi \cos \vartheta + \frac{d\varphi}{ds} \sin \vartheta,$$

$$\mathfrak{M} \frac{dq}{ds} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{M}) rp + C_1 \sin \varphi \cos \vartheta, \quad q = \frac{d\kappa}{ds} \sin \varphi \sin \vartheta + \frac{d\varphi}{ds} \cos \vartheta,$$

$$\mathfrak{C} \frac{dr}{ds} = 0 \qquad r = \frac{d\kappa}{ds} \cos \varphi + \frac{ds}{ds}.$$

Этотъ вопросъ имѣетъ аналогію съ вопросомъ о вращеніи гироскопа подъ вліяніемъ силы тяжести вокругъ неподвижной точки, находящейся на оси симметріи гироскопа, но не совпадающей съ его центромъ тяжести. Рѣшеніе вопроса можетъ быть доведено до конца, но мы ограничимся только тѣмъ частнымъ случаемъ, который ана-

\*) См. статью Hess. Ueber die Biegung und Drillung eines unendlich dnnen elastischen Stabes, ... Mathematische Annalen. Bd. 23, стр. 181.

логиченъ вращенію безъ нутаціи; не трудно предвидѣть, что въ этомъ случаѣ ось проволоки должна получить видъ спирали.

Положивъ  $\phi = \text{постоянному}$ , найдемъ, что  $p^2 + q^2 = (\mathcal{M}' \sin \phi)^2$  и  $p \sin \varepsilon + q \cos \varepsilon = 0$ , а потому помноживъ первое изъ трехъ дифференціальныхъ уравненій на  $p$ , второе на  $q$  и сложивъ, получимъ во второй части нуль; следовательно  $p^2 + q^2 = \text{постоянному}$ .

Означивъ постоянную величину производной  $\frac{d\mathcal{M}}{ds}$  черезъ  $\omega_1$  и постоянную величину  $r$  черезъ  $n$ , мы найдемъ постоянную величину  $n$  для производной:

$$\frac{ds}{d\mathcal{M}} = n - \omega_1 \cos \phi = \omega_2;$$

затѣмъ получимъ:

$$\mathcal{M} = \omega_1 s, \quad \varepsilon = \omega_2 s + \varepsilon_0.$$

Видъ кривой опредѣлится послѣ интегрированія слѣдующихъ уравненій:

$$\frac{dx}{ds} = v_x = \sin \phi \cos (\omega_1 s), \quad \frac{dy}{ds} = v_y = \sin \phi \sin (\omega_1 s), \quad \frac{dz}{ds} = v_z = \cos \phi.$$

Уравненія кривой:

$$x = \frac{\sin \phi}{\omega_1} \sin (\omega_1 s), \quad y = -\frac{\sin \phi}{\omega_1} \cos (\omega_1 s), \quad z = s \cos \phi,$$

выражаютъ, что ось проволоки образуетъ винтовую спираль, касательная къ которой составляетъ съ осью  $Z$ -овъ уголъ  $\phi$  и которая находится на цилиндрѣ радіуса  $R$ , равнаго  $(\sin \phi : \omega_1)$ , такъ что высота  $h$  полного оборота винта равна  $(2\pi \cos \phi : \omega_1)$ .

Для того, чтобы ось проволоки имѣла такой видъ, необходимо, чтобы моменты  $L_x$ ,  $L_y$  и  $L_z$  на оконечности ея были равны:

$$L_x = -E\mathcal{M} \frac{\sin^2 \phi}{R} \cos \varepsilon, \quad L_y = E\mathcal{M} \frac{\sin \phi}{R} \sin \varepsilon, \quad L_z = 2Kn$$

и чтобы  $EC$  было равно:

$$EC = \mathcal{M} \frac{\sin \phi}{R} (2Kn - E \frac{\sin \phi \cos \phi}{R}).$$

Моменты же  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$  должны быть:

$$L_x = \mathcal{M} \sin \phi \cos \mathcal{M} (2Kn - E \frac{\sin \phi}{R} \cos \phi) - EC_1 R \cos \mathcal{M},$$

$$L_y = \mathcal{M} \sin \phi \sin \mathcal{M} (2Kn - E \frac{\sin \phi}{R} \cos \phi) - EC_1 R \sin \mathcal{M},$$

$$L_z = \mathcal{M} \left( E \frac{\sin^2 \phi}{R} + 2Kn \cos \phi \right).$$



Представимъ себѣ, что концы проволоки прирѣзаны къ двумъ пластинкамъ, перпендикулярнымъ къ оси  $Z$ -овъ и что напряжения  $EC_1$  и  $-EC_1$  приложены не непосредственно къ концамъ проволоки, но къ точкамъ пластинокъ, находящимся на оси  $Z$ -овъ; тогда проэкція на оси  $X$ -овъ и  $Y$ -овъ момента силы  $EC_1$  вокругъ оконечности проволоки (координаты этой оконечности:  $x = R \sin \varphi$ ,  $y = -R \cos \varphi$ ) будутъ равны  $EC_1 R \cos \varphi$  и  $EC_1 R \sin \varphi$ , т. е.  $I_x$  и  $I_y$ . Слѣдовательно проволока будетъ въ равновѣсїи, имѣя форму цилиндрической винтовой линїи радіуса  $R$  и наклоненїя  $\varphi$  къ оси  $Z$ -овъ, если къ пластинкамъ, кромѣ силъ  $EC_1$  и  $-EC_1$ , будетъ приложено еще по парѣ силъ съ моментами  $I_z$  и  $(-I_z)$ .

Можно удерживать проволоку въ этомъ видѣ только силами  $EC_1$  и  $(-EC_1)$ , безъ содѣйствїя паръ  $I_x$  и  $(-I_x)$ ; для этого необходимо, чтобы  $n$  и  $\omega_2$  имѣли слѣдующїя величины:

$$n = -\frac{E \sin^2 \varphi}{2KK' \cos \varphi}, \quad \omega_2 = -\frac{E \sin^2 \varphi + 2KK' \cos^2 \varphi}{2KK'} \operatorname{tg} \varphi$$

и чтобы сила  $EC_1$  была равна:

$$EC_1 = -\frac{EI \sin^2 \varphi}{R \cos \varphi}.$$

Знакъ минуса показываетъ, что силы эти должны стремиться сближать пластинки и сжимать спираль.

## § 52. Винтовая пружина.

Уравненїя равновѣсїя, приведенныя въ § 49, относятся ко всякимъ проволокамъ, правильнымъ или неправильнымъ, бывшимъ въ предварительномъ состоянїи прямолинейными или криволинейными. Между прочимъ можно замѣтить, что изъ уравненїй (297) и (298) можно исключить величины  $B_z$  и  $B_y$  и тогда получимъ четыре слѣдующїя дифференціальныя уравненїя, заключающїя  $B_x$ ,  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ :

$$\frac{d}{ds} (B_z v_x + Q_z v_y - Q_y v_z) + \sigma \mathfrak{B}_x = 0, \quad Q_x = \frac{dI_x}{ds} + \sigma \mathfrak{B}_x.$$

$$\frac{d}{ds} (B_z v_y + Q_x v_z - Q_z v_x) + \sigma \mathfrak{B}_y = 0, \quad Q_y = \frac{dI_y}{ds} + \sigma \mathfrak{B}_y.$$

$$\frac{d}{ds} (B_x v_z + Q_y v_x - Q_x v_y) + \sigma \mathfrak{B}_z = 0, \quad Q_z = \frac{dI_z}{ds} + \sigma \mathfrak{B}_z.$$

$$Q_x v_x + Q_y v_y + Q_z v_z = 0.$$

Соотношенїя же между моментами  $I$  и величинами  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , выведенныя въ § 50-мъ, относятся только къ проволокамъ, бывшимъ въ предварительномъ состоянїи прямолинейными. Для проволоки, ось которой въ предварительномъ состоянїи была криволинейною, предполагается существованїе слѣдующей зависимости между моментами  $I$ , величинами  $p$ ,  $q$ ,  $r$  въ деформированномъ состоянїи и величинами  $p_0$ ,  $q_0$  и  $r_0$  въ предварительномъ состоянїи:

$$p - p_0 = \frac{I_x}{E \mathfrak{B}_x}, \quad q - q_0 = \frac{I_y}{E \mathfrak{B}_y}, \quad r - r_0 = \frac{I_z}{E \mathfrak{B}_z} \dots \dots \dots (317)$$

Вслѣдствіе этого для проволоки съ поперечнымъ сѣченіемъ въ видѣ круга или многоугольника, бывшей изогнутою въ предварительномъ состояніи и неподверженной объемнымъ силамъ, уравненія равновѣсія (306) получаютъ слѣдующій видъ:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A} \frac{d(p-p_0)}{ds} &= \mathfrak{A} (q-q_0) r - \mathfrak{G} (r-r_0) q + C_1 \sin \phi \sin \vartheta = 0, \\ \mathfrak{A} \frac{d(q-q_0)}{ds} &= \mathfrak{G} (r-r_0) p - \mathfrak{A} (p-p_0) r + C_1 \sin \phi \cos \vartheta = 0, \\ \mathfrak{G} \frac{d(r-r_0)}{ds} &= \mathfrak{A} ((p-p_0) q - (q-q_0) r). \end{aligned} \right\} \dots (318)$$

Положимъ, что проволока въ предварительномъ состояніи имѣла форму винтовой спирали радіуса  $R_0$  и угла наклоненія  $\phi_0$  къ оси цилиндра, такъ что  $p_0$ ,  $q_0$  и  $r_0$  имѣютъ слѣдующія величины:

$$p_0 = -\frac{\sin^2 \phi_0}{R_0} \cos \vartheta_0, \quad q_0 = \frac{\sin^2 \phi_0}{R_0} \sin \vartheta_0, \quad r_0 = \frac{\sin \phi_0 \cos \phi_0}{R_0} + (\omega_z)_0.$$

Эта проволока можетъ получать видъ винтовой спирали радіуса  $R$  и угла наклоненія  $\phi$ , причемъ новыя  $\vartheta$  будутъ равны прежнимъ  $\vartheta_0$  подъ вліяніемъ напряженій  $C_1 E$  и пары, приложенныхъ концамъ ея. Въ самомъ дѣлѣ, последнее изъ уравненій (318) удовлетворяется тождественно при  $r$  равномъ постоянной величинѣ и при  $\vartheta = \vartheta_0$ , а изъ первыхъ двухъ, при слѣдующихъ величинахъ  $p$ ,  $q$ ,  $r$ :

$$p = -\frac{\sin^2 \phi}{R} \cos \vartheta_0, \quad q = \frac{\sin^2 \phi}{R} \sin \vartheta_0, \quad r = \frac{\sin \phi \cos \phi}{R} + (\omega_z)_0,$$

получимъ слѣдующее выраженіе величины  $C_1 E$ :

$$C_1 E = \frac{\mathfrak{A}}{R} \left( 2K \left( \frac{\sin \phi \cos \phi}{R} - \frac{\sin \phi_0 \cos \phi_0}{R_0} \right) \sin \phi - E \left( \frac{\sin^2 \phi}{R} - \frac{\sin^2 \phi_0}{R_0} \right) \cos \phi \right). \quad (319)$$

Моменты же  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  окажутся равными:

$$M_x = EC_1 R \cos \vartheta, \quad M_y = EC_1 R \sin \vartheta,$$

$$M_z = \mathfrak{A} \left( E \left( \frac{\sin^2 \phi}{R} - \frac{\sin^2 \phi_0}{R_0} \right) \sin \phi + 2K \left( \frac{\sin \phi \cos \phi}{R} - \frac{\sin \phi_0 \cos \phi_0}{R_0} \right) \cos \phi \right). \quad (320)$$

Если концы проволоки будутъ прикручены къ пластинкамъ, въ разстояніи  $R$  отъ оси цилиндра, то проволока будетъ въ равновѣсіи подъ вліяніемъ силъ  $EC_1$  и  $-EC_1$  и пары  $M_z$  и  $-M_z$ , приложенныхъ къ этимъ пластинкамъ.

Изъ формулы (319) получимъ приближенное выраженіе величинъ силъ, которыя надо приложить къ концамъ винтовой пружины съ незначительною высотой шага винта, для того, чтобы растянуть ее на незначительную длину по высотѣ винта; положивъ  $\phi$  равнымъ  $\phi_0 + \delta\phi_0$  и пренебрегая квадратами и высшими степенями  $\delta\phi_0$  и измѣненіемъ радіуса цилиндра, получимъ:

$$EC_1 = 2K \mathfrak{A} \frac{\delta \vartheta}{l R^2}, \dots \dots \dots (321)$$

гдѣ  $l$  есть длина проволоки,  $\vartheta = l \cos \phi_0$ .

# ОГЛАВЛЕНИЕ.

§§

стр.

## Введение въ теорію упругости, гидростатика и основныя уравненія гидродинамики.

1. О составленіи дифференціальных уравненій движенія гибкихъ и деформируемыхъ сплошныхъ тѣлъ . . . . . 3

1. Предположенія, дѣлаемыя относительно силъ взаимодѣйствія между атомами . . . . . 4
2. Шесть дифференціальныхъ уравненій для каждой части тѣла . . . . . 5
3. Радиусъ сферы дѣйствія частичныхъ силъ . . . . . 5
4. Напряженіе (Stress) . . . . . 6
5. Выраженія проэкцій на оси координатъ главнаго вектора и главнаго момента напряженій, дѣйствующихъ на часть тѣла . . . . . 8
6. Измѣренія напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ данной поверхности. Давленія, натяженія и тангенціальныя напряженія . . . . . 9
7. Силы, приложенныя къ элементамъ объема сплошнаго тѣла . . . . . 10
8. Преобразованныя шесть уравненій § 2-го . . . . . 12
9. Примѣненіе уравненій § 2-го къ элементарному тетраэдру . . . . . 13
10. Формулы преобразованныхъ интеграловъ, распространенныхъ по замкнутой поверхности, въ интегралы, распространенныя по объему ограниченному этою поверхностью . . . . . 16
11. Дифференціальныя уравненія для всѣхъ точекъ сплошнаго деформируемаго тѣла . . . . . 18

## II. Гидростатика . . . . . 21

12. Уравненія равновѣсія жидкостей . . . . . 23
13. Условія равновѣсія жидкости . . . . . 23
14. Равновѣсіе тяжелой несжимаемой жидкости въ сосудахъ. Давленіе на дно и стѣнки сосуда. Давленіе на плоскую стѣнку. Центръ давленія . . . . . 25
15. Соноупность давленій жидкости на погруженное тѣло. Законъ Архимеда . . . . . 29
16. Условія равновѣсія и устойчивости равновѣсія тяжелаго твердаго тѣла, плавающего въ несжимаемой тяжелой покоящейся жидкости . . . . . 32

## III. Уравненія гидродинамики . . . . . 41

17. Аналитическое выраженіе движенія сплошнаго деформирующагося тѣла. Скорости и ускоренія точекъ его . . . . . 44
18. Дифференціальное уравненіе неразрывности деформирующагося вещества . . . . . 44
19. Общія дифференціальныя уравненія движенія жидкостей, необладающихъ треніемъ . . . . . 47
20. Движенія несжимаемой жидкости, при которыхъ скорости имѣютъ потенціалъ . . . . . 49
21. Установившееся движеніе Теорема Д. Бернулли . . . . . 51

# Ученіе объ упругихъ деформацияхъ твердыхъ тѣлъ.

## IV. Обь однородныхъ деформацияхъ сплошной тѣла.

22. Однородная деформация .....	51
23. Эллипсоиды деформации и поверхности удлинений. Кубическое расширение единицы объема вещества .....	57
24. Главныя оси деформации. Разложеніе однородной деформации на чистую деформацию и на вращеніе .....	61
25. Конические поверхности равнаго удлиненія. Неискажающіяся плоскости .....	69
26. О соединеніи однородныхъ деформаций .....	70
27. Обь однородныхъ ничтожно-малыхъ деформацияхъ .....	73

## V. Обь эллипсоидѣ напряженій и поверхности направленій .....

28. Главныя напряженія .....	76
29. Эллипсоидъ напряженій .....	78
30. Поверхность направленій .....	—
31. Случаи, въ которыхъ одно или два изъ главныхъ напряженій равны нулю .....	81

## VI. Зависимость между напряжениями и деформациями .....

32. Выраженія проѣкцій напряженій въ видѣ суммъ, распространенныхъ на всѣ частицы, окружающія ту точку тѣла, черезъ которую проведена площадка .....	—
33. Состояніе упругаго тѣла до деформирования. Предварительныя напряженія .....	87
34. Выраженія напряженій въ деформированномъ состояніи твердаго тѣла при предположеніи, что относительныя перемѣщенія содѣявшихся точекъ тѣла ничтожно-малы сравнительно съ ихъ предварительными взаимными разстояніями .....	88
35. Начало Галамбера въ примѣненіи къ сплошному деформируемому тѣлу. Другой приемъ вывода выраженій (153) .....	94
36. Коэффициенты упругости. Число коэффициентовъ для тѣлъ кристаллическихъ и изотропно-упругихъ .....	100
37. Разсмотрѣніе значеній двухъ коэффициентовъ упругости изотропно-упругаго тѣла .....	104
38. Формулы Грина, выражающія зависимость между напряжениями и давленіями .....	110
39. Сравненіе формулъ Коши съ формулами Грина .....	113

## VII. О равновѣсіи упругаго тѣла .....

40. Величины, опредѣляющія состояніе деформации тѣла .....	—
41. Дифференціальныя уравненія втораго порядка, которымъ должны удовлетворять $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, 2g_1, 2g_2, 2g_3$ .....	116
42. Уравненія равновѣсія упругаго тѣла .....	117
43. Обь устойчивости внутренняго равновѣсія упругаго тѣла .....	118

## VIII. Нѣкоторые примѣры рѣшеній вопросовъ о равновѣсіи изотропно-упругаго тѣла .....

44. Однородный изотропный цилиндръ, подвергасмый продольному растяженію или сжатію .....	—
45. Крученіе призмъ .....	121
46. Изгибъ призмъ, одновременно съ крученіемъ и растяженіемъ или сжатіемъ .....	112

## IX. О равновѣсіи тонкихъ упругихъ проволокъ .....

47. ....	164
48. Проволока, ось которой въ предварительномъ состояніи была прямолинейною. Величины, опредѣляющія положеніе элементовъ проволоки въ деформированномъ состояніи .....	165
49. Уравненія равновѣсія элементовъ проволоки .....	168
50. Зависимость между величинами $p, q, r$ и моментами $I$ .....	170
51. Различныя случаи равновѣсія проволокъ, неподверженныхъ объемнымъ силамъ .....	174
52. Вискозная пружина .....	181

